

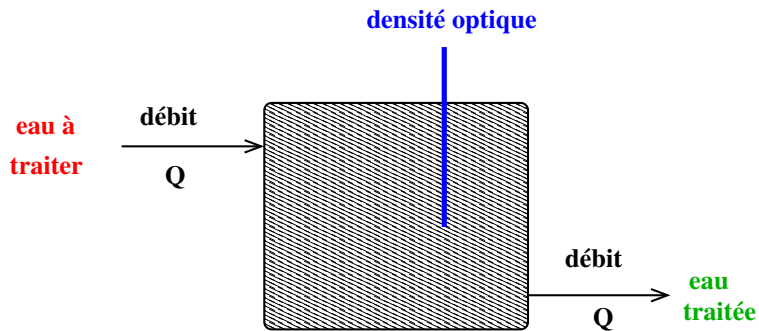
A propos de "sur-rendement" dans le chémostat à l'aide de commande périodique

ALAIN RAPAPORT
MISTEA, Montpellier

Ecole CIMPA, Hammamet

24 september - 3 octobre 2022

Motivations



bioréacteur à flux continu

Modèle du bioréacteur

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{\mu(s)x}{Y} + D(s_{in} - s) \\ \dot{x} = \mu(s)x - Dx \end{cases} \quad D \in [D_{min}, D_{max}]$$

(sans perte de généralité, on peut considérer $Y = 1$)

▶ $D = \bar{D}$ constant: équilibre t.q. $\mu(\bar{s}) = D$, $\bar{x} = s_{in} - \bar{s}$

▶ $D(\cdot)$ non constant t.q. $\int_0^{+\infty} D(t)dt = +\infty$:

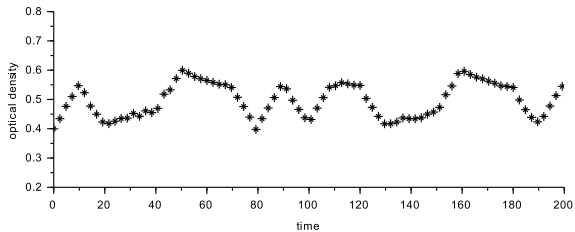
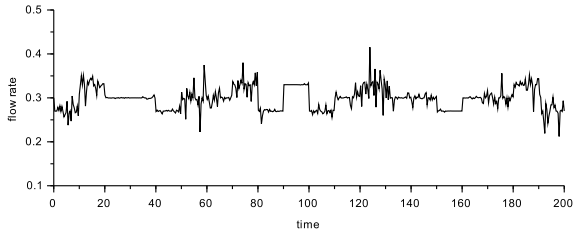
$$z = s + x \Rightarrow \dot{z} = D(t)(s_{in} - z) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = s_{in}$$

▶ $\dot{s} = (D(t) - \mu(s))(s_{in} - s)$

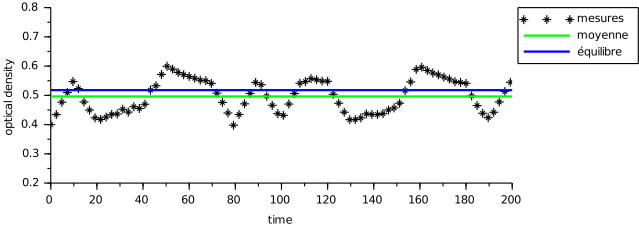
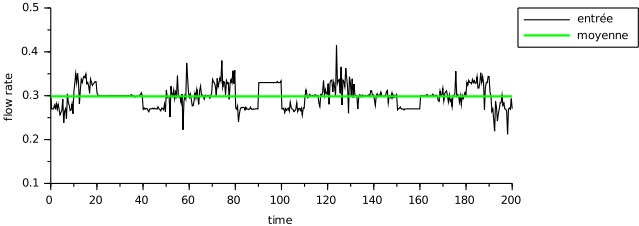
ou

▶ $\dot{x} = (\mu(s_{in} - x) - D(t))x$

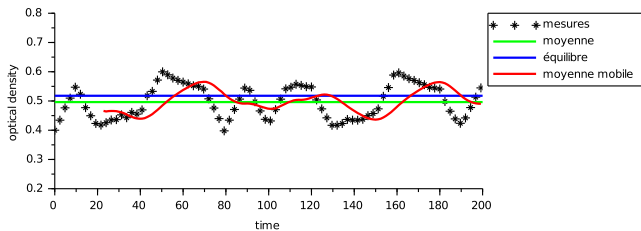
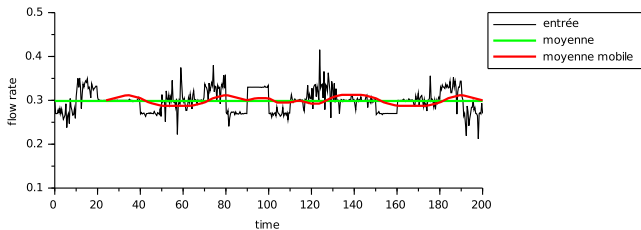
Simulations avec débit variable



Moyennes



Moyennes mobiles



(fenêtre= 24 heures)

A propos de "sur-rendement"

Critère: $J_T(D(\cdot)) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$ (*qualité de l'eau*)

Problem: Est-ce qu'il existe une solution périodique avec $J_T(D(\cdot))$ **inférieur** à \bar{s} et

$$\frac{1}{T} \int_0^T D(t) dt = \bar{D} \quad (\text{quantité d'eau fixée}) ?$$

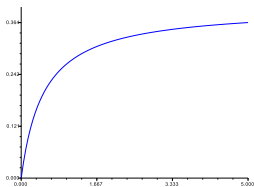
Un problème équivalent

Critère: $J_T(D(\cdot)) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ (*biomasse moyenne*)

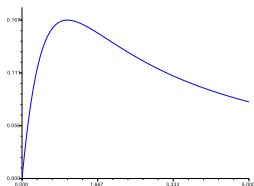
Question: Est-ce qu'il existe une solution périodique avec $J_T(D(\cdot))$ **supérieur** à \bar{x} et

$$\frac{1}{T} \int_0^T D(t) dt = \bar{D} \quad (\text{quantité d'eau fixée}) ?$$

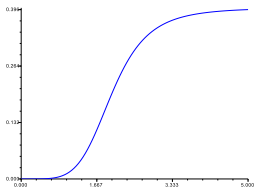
Prototypes de fonction de croissance



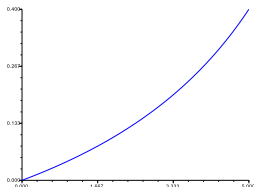
Monod:
$$\mu(s) = \frac{\mu_{max} s}{K + s}$$



Haldane:
$$\mu(s) = \frac{\mu_{max} s}{K + s + \frac{s^2}{K_i}}$$



Hill:
$$\mu(s) = \frac{\mu_{max} s^n}{K^n + s^n} \quad (n > 1)$$



Contois:
$$\mu(s, x) = \frac{\mu_{max} s}{K_x + s}$$

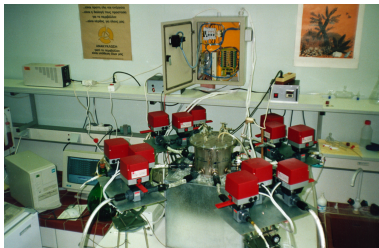
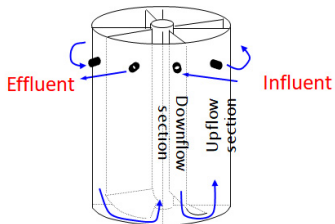
(avec $x = s_{in} - s$ and $K > 1$)

Littérature en bioprocédés

- ▶ J.W. Gilley and H.R. Bungay, *N Frequency Response Analysis of Dilution Rate Effects on Yeast Growth* Biotechnology and bioengineering, Vol. 10, pp. 99–103, 1968.
- ▶ E.M. Abulesz and G. Lyberatos, *Periodic Optimization of Microbial Growth Processes*, Biotechnology & Bioengineering, vol. 29, pp. 1059–1067, 1987.
- ▶ E.M. Abulesz and G. Lyberatos, *Periodic Operation of a Continuous Culture of Baker's Yeast*, Biotechnology & Bioengineering, vol. 34, pp. 741–749, 1989.
- ▶ V. Hatzimanikatis, G. Lyberatos, S. Pavlou and S.A. Svoronos, *A Method for Pulsed Periodic Optimization of Chemical Reaction Systems*, Chemical Engineering Science, vol. 48, n. 4, pp. 789–797, 1993.
- ▶ L. Ruan and D. Chen, *Comparison of Several Periodic Operations of a Continuous Fermentation Process* Biotechnol. Prog. Vol. 12, pp. 286–288, 1996.

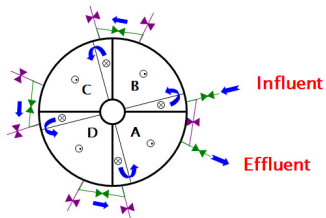
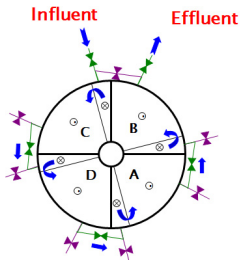
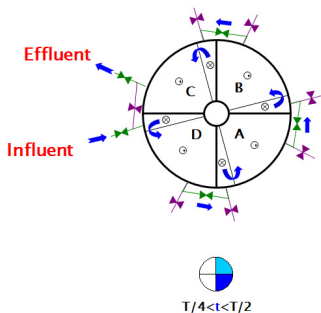
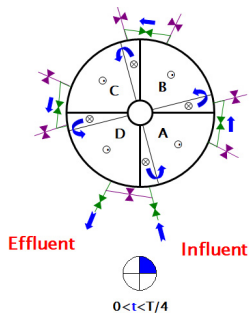
*Des améliorations des performances par rapport
à l'état d'équilibre sont observées*

Le quadri-réacteur tournant



Skiadas Lyberatos 1998

Le quadri-réacteur tournant



Littérature en commande optimale

▶ **linear-quadratic approximation / frequency approach**

S. Bittanti, G. Fronza and G. Guardabassi, *Periodic control: A frequency domain approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 18, pp. 33–38, 1973.

D.S. Bernstein and E.G. Gilbert, *Optimal periodic control: The π test revisited*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 25, pp. 673–684, 1980.

▶ **local necessary conditions**

S. Bittanti, A. Locatelli and S. Rinaldi, *Status of periodic optimization of dynamical systems*, J. Optimization Theory and Appl., vol. 14, pp. 1–20, 1974.

E.G. Gilbert, *Optimal periodic control: A general theory of necessary conditions*, SIAM J. Control Optim., vol. 15, pp. 717–746, 1987.

► second order conditions

S. Bittanti, A. Locatelli and C. Maffezzoni, *Second-variation methods in periodic optimization*, J. Optimization Theory and Appl., vol. 14, pp. 31–49, 1974.

J.L. Speyer and R.T. Evans, *A second variation theory for optimal periodic processes*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 29, pp. 138–148, 1984.

E.G. Gilbert, Q. Wang, Q. and J.L. Speyer, *Necessary and Sufficient Conditions for Local Optimality of a Periodic Process*, SIAM J. Control Optim., vol. 28, pp. 482–497, 1990.

Plan du cours

- ▶ Caractérisation des solutions périodiques
- ▶ Conditions pour l'existence d'un "sur-rendement"
- ▶ Etude des profils optimaux - cas convexe puis non convexe
 - ▶ conditions de corde/pente
 - ▶ technique de "swap"
- ▶ Etude des profils optimaux - cas non convexe
- ▶ Que sait-on si deux espèces sont en compétition?

Références

- ▶ T. BAYEN, A. RAPAPORT, F.-Z TANI, *Optimal periodic control for scalar dynamics under integral constraint on the input*, Mathematical Control and Related Fields, 2020.
- ▶ T. BAYEN, A. RAPAPORT, F.-Z. TANI, *Improvement of performances of the chemostat used for continuous biological water treatment with periodic controls*, Automatica, 2020.
- ▶ F.-Z. TANI, A. RAPAPORT, T. BAYEN, *Periodic controls for discriminating density dependent growth in the chemostat*, IEEE Conference on Decision and Control, Nice, 2019.
- ▶ T. GUILMEAU, A. RAPAPORT, *Singular arcs in optimal periodic control problems with scalar dynamics and integral input constraint*, Journal of Optimization, Theory and Applications, 2022.

Etude du modèle du chémostat à débit périodique

ALAIN RAPAPORT
MISTEA, Montpellier

Ecole CIMPA, Hammamet

24 september - 3 octobre 2022

Application de Poincaré

$$(\mathcal{S}) : f(t, x) := (\mu(s_{in} - x) - D(t))x, \quad x \in [0, s_{in}]$$

Hypothèse. μ est croissant avec $\mu(0) = 0$ et $\mu(s_{in}) > \langle D \rangle_T$

$$\begin{aligned} P : [0, s_{in}] &\mapsto [0, s_{in}] \\ x_0 &\rightarrow x(T, x_0) \end{aligned}$$

- ▶ $P(0) = 0$
- ▶ $P(s_{in}) < s_{in}$. Sinon $0 = \int_0^T \dot{x} dt = \int_0^T \mu(s_{in} - x) - D dt$.
 $x \equiv s_{in}$ n'est pas possible $\Rightarrow \exists \hat{t} \in (0, T)$ t.q. $x(\hat{t}) < s_{in}$.
Mais $f(t, x) \leq g(x) := \mu(s_{in} - x)x \Rightarrow x(T) \leq y(T)$ avec
 $\dot{y} = g(y)$, $y(\hat{t}) = x(\hat{t})$. Or $y(T) < s_{in}$. Contradiction.
- ▶ $P'(x_0) = v(T)$ avec $\dot{v} = \partial_x f(t, x) \cdot v$, $v(0) = 1$
 $\Rightarrow P'(x_0) = e^{\int_0^T \mu(s_{in} - x(t)) - D(t) - \mu'(s_{in} - x(t))x(t) dt} > 0$
 $\Rightarrow P'(0) = e^{\mu(s_{in}) - \langle D \rangle_T} > 1$

Application de Poincaré

$Q(x_0) = P(x_0) - x_0$ vérifie $Q(0) = 0$, $Q(s_{in}) < 0$ avec $Q'(0) > 0$
 $\Rightarrow \exists x^* \in (0, s_{in})$ t.q. $Q(x^*) = 0$ i.e. $P(x^*) = x$.

Or une solution périodique vérifie $\int_0^T \mu(s_{in} - x(t)) - D(t) dt = 0$
 $\Rightarrow Q'(x^*) < 0$: $x^* > 0$ est unique.

Soit $x_0 \notin \{0, x^*\}$.

- ▶ $P(x_0) < x_0$ alors $P^n(x_0) < \dots < P(x_0) \Rightarrow P_n(x_0) \rightarrow \underline{x} \geq 0$ et $Q(\underline{x}) = 0$. Mais $Q'(0) > 0 \Rightarrow Q(0) > 0$ près de 0: $\underline{x} = x^*$.
- ▶ $P(x_0) > x_0 \Rightarrow P_n(x_0) \rightarrow \bar{x} \leq s_{in}$. Mais $Q(s_{in}) < 0$: $\bar{x} = x^*$.

Conclusion: pour tout $x_0 > 0$, la solution de (\mathcal{S}) converge vers la solution périodique $x(\cdot, x^*)$.

Condition de sur-rendement

Soit une solution périodique non constante.

Elle vérifie nécessairement $\langle \mu(s_{in} - x) \rangle_T = \bar{D} = \mu(s_{in} - \bar{x})$.

- ▶ Si μ est strictement convexe

$$\mu(s_{in} - \bar{x}) = \langle \mu(s_{in} - x) \rangle_T > \mu(s_{in} - \langle x \rangle_T) \quad (\text{Jensen})$$

et μ croissante $\Rightarrow \bar{x} < \langle x \rangle_T$

- ▶ Si μ est concave, de façon analogue $\bar{x} \geq \langle x \rangle_T$

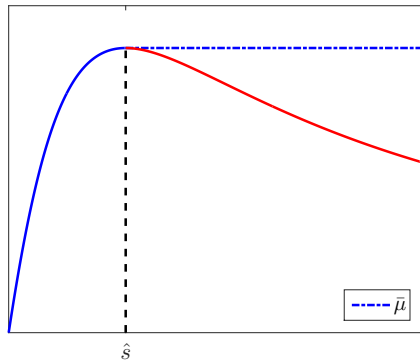
Condition de sur-rendement

- ▶ S'il existe $\bar{\mu}$ continue concave croissante sur $[0, s_{in}]$ t.q. $\bar{\mu} \geq \mu$ avec $\bar{\mu}(s_{in} - \bar{x}) = \mu(s_{in} - \bar{x})$, alors

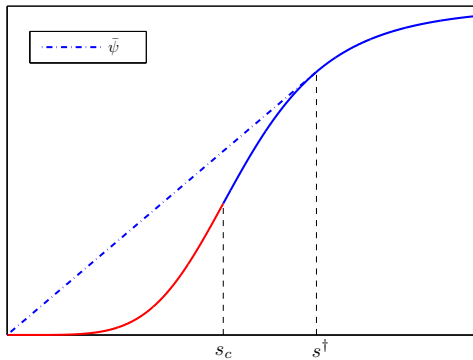
$$\bar{\mu}(s_{in} - \langle x \rangle_T) \geq \langle \bar{\mu}(s_{in} - x) \rangle_T \geq \langle \mu(s_{in} - x) \rangle_T = \mu(s_{in} - \bar{x}) = \bar{\mu}(s_{in} - \bar{x})$$

$$\bar{\mu} \text{ croissante} \Rightarrow \bar{x} \geq \langle x \rangle_T$$

Cas Haldane



Cas Hill



Problème de commande optimale

Supposons μ strictement convexe sur $[0, s_{in}]$

Soit $\bar{D} > 0$ et $\bar{x} \in (0, s_{in})$ tel que $\mu(s_{in} - \bar{x}) = \bar{D}$.

Soit $0 \leq D_- < \bar{D} < D_+$

Problème. Pour quel $D(\cdot) \in [D_-, D_+]$ t.q. $\langle D \rangle_T = \bar{D}$ la solution périodique maximise $\langle x \rangle_T$?

Remarque. on peut exiger $x(0) = \bar{x}$ car

$$\langle \mu(s_{in} - x) \rangle_T = \mu(s_{in} - \bar{x}) \Rightarrow \int_0^T \mu(s_{in} - x(t)) - \mu(s_{in} - \bar{x}) dt = 0$$

$$\longrightarrow J_T := \inf_{u(\cdot)} \int_0^T -x(t) dt \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu(s_{in} - x) - u)x, & x(0) = \bar{x} \\ \dot{y} = u, & y(0) = 0 \end{cases} \quad u \in [D_-, D_+] \text{ et } \begin{cases} x(T) = \bar{x} \\ y(T) = T\bar{D} \end{cases}$$

Existence de solutions non constantes

Soit $v(\cdot)$ périodique de période T t.q. $\int_0^T v(t)dt = 0$ et

$u_\epsilon(t) = \bar{D} + \epsilon v(t)$ admissible pour $|\epsilon| > 0$ assez petit

$\Theta(x_0, \epsilon) := x(x_0, T, u_\epsilon) - x_0$ est continue

▶ si $x_0 > \bar{x}$, $x(x_0, \cdot, \bar{D})$ est décroissant $\Rightarrow \Theta(x_0, 0) < 0$

▶ si $x_0 < \bar{x}$, $x(x_0, \cdot, \bar{D})$ est croissant $\Rightarrow \Theta(x_0, 0) > 0$

Il existe $\epsilon \neq 0$, $x_0^- < \bar{x} < x_0^+$ t.q. $\Theta(x_0^+, \epsilon) < 0$ et $\Theta(x_0^-, \epsilon) > 0$.
D'où l'existence de \bar{x}_0 t.q. $\Theta(\bar{x}_0, \epsilon) = 0$ i.e. une solution $x(\cdot)$
périodique admissible non constante. Or il existe nécessairement
 $\hat{t} \in [0, T]$ t.q. $x(\hat{t}) = \bar{x}$.

La commande $u(t) = u_\epsilon(t - \hat{t})$ convient.

Application du Principe du Maximum

$$H = \lambda_x(\mu(s_{in}-x)-u)x + \lambda_y u - \lambda_0 x = \lambda_x \mu(s_{in}-x)x - \lambda_0 x + \underbrace{u(\lambda_y - \lambda_x)}_{\phi}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_x = -\partial_x H = (\mu'(s_{in}-x)x - \mu(s_{in}-x) - u)\lambda_x + \lambda_0 \\ \dot{\lambda}_y = -\partial_y H = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -(\mu'(s_{in}-x)x - \mu(s_{in}-x) + u)\lambda_x x - (\mu(s_{in}-x) - u)\lambda_x x - \lambda_0 x \\ &= -\mu'(s_{in}-x)\lambda_x x^2 - \lambda_0 x \end{aligned}$$

Si $\lambda_0 = 0$, λ_x est jamais nul. Sinon $\lambda_x \equiv 0$, $\lambda_y \neq 0$ et $u \equiv D_-$ ou $u \equiv D_+$: pas possible.

Donc ϕ est strictement monotone $\Rightarrow x$ reste au dessus ou en dessous de \bar{x} : pas possible.

Finalement, $\lambda_0 = -1$.

Ensemble atteignable

$$x(t) \in \mathcal{A}(t) = [x^-(t), x^+(t)] \text{ où } x^\pm(t) = x(\bar{x}, t, D_\mp), \quad t \in [0, T]$$

De plus, $f(x, D_-) > 0$, $f(x, D_+) < 0$, $\forall x \in \mathcal{A}(t)$, $\forall t \in [0, T]$.

$$\text{Soit } x_m = \min_{t \in [0, T]} x(t) = x(t_m), \quad x_M = \max_{t \in [0, T]} x(t) = x(t_M).$$

On a $\phi(t_m) = \phi(t_M) = 0$, sinon $\dot{x}(t_m), \dot{x}(t_M) \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda_x(t_m)x_m = \lambda_x(t_M)x_M = \lambda_y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H &= \lambda_x(t_m)\mu(s_{in} - x_m)x_m + x_m = \lambda_y\mu(s_{in} - x_m) + x_m \\ &= \lambda_x(t_M)\mu(s_{in} - x_M)x_M + x_M = \lambda_y\mu(s_{in} - x_M) + x_M \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_y} = \frac{\mu(s_{in} - x_M) - \mu(s_{in} - x_m)}{x_M - x_m} := p(x_m, x_M)$$

Condition de corde/pente

- ▶ s'il existe t_s t.q. $\phi(t_s) = 0$ avec $x_m < x(t_s) < x_M$

$\Rightarrow p(x(t_s), x_m) = p(x(t_s), x_M)$: impossible pour μ strict. convexe

Donc les commutations ne peuvent se produire qu'en x_m ou x_M

- ▶ si $\phi = \lambda_y - \lambda_x x = 0$ sur $[t_1, t_2]$ alors

$$\dot{\phi} = -\mu'(s_{in} - x)\lambda_x x^2 + x = -x(\mu'(s_{in} - x)\lambda_x x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_y} = \mu'(s_{in} - x): x = x_s \text{ constant sur } [t_1, t_2], \text{ et donc}$$

$$\frac{1}{\lambda_y} = \mu'(s_{in} - x_s) = p(x_m, x_M) \text{ avec } x_s \in \{x_m, x_M\}$$

impossible pour une fonction strictement convexe.

Donc il n'y a pas d'arc singulier

Commande bang-bang

$$u_T^{BB+}(t) = \begin{cases} D_-, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T) \\ D_+, & t \in [t_1, t_2) \end{cases}$$

$$u = D_- \Rightarrow \dot{x} > 0 : t_1 = \int_{\bar{x}}^{x_M} \frac{dx}{(\mu(s_{in} - x - D_-)x)},$$

$$T - t_2 = \int_{x_m}^{\bar{x}} \frac{dx}{(\mu(s_{in} - x - D_-)x)}$$

$$u = D_+ \Rightarrow \dot{x} < 0 : t_2 - t_1 = \int_{x_M}^{x_m} \frac{dx}{(\mu(s_{in} - x - D_+)x)}$$

$$\Rightarrow T = \int_{x_m}^{x_M} \underbrace{\left[\frac{1}{(\mu(s_{in} - x - D_-)x)} - \frac{1}{(\mu(s_{in} - x - D_+)x)} \right]}_{\eta(x) > 0 \text{ sur } \mathcal{A}(T)} dx \quad (\text{Eq.1})$$

De même

$$\bar{D}T = \int_{x_m}^{x_M} \underbrace{\left[\frac{D_-}{(\mu(s_{in} - x - D_-)x)} - \frac{D_+}{(\mu(s_{in} - x - D_+)x)} \right]}_{\eta(x)\mu(s_{in}-x)} dx \quad (\text{Eq.2})$$

Unicité de la commande bang-bang

► Soit $\alpha \in [x^-(T), \bar{x}]$ et $I_\alpha(\beta) = \int_\alpha^\beta \eta(x) dx$, $\beta \in [\alpha, x^+(T)]$

On a $I_\alpha(\alpha) = 0$, $I_\alpha(x^+(T)) > T$ et I_α croissante

$\Rightarrow \exists! \beta_T(\alpha) > \alpha$ t.q. $I_\alpha(\beta_T(\alpha)) = T$ (cf Eq. 1) et $\beta'_T > 0$, $\beta_T(\alpha) > \alpha$

► Soit $F(\alpha) = \int_\alpha^{\beta_T(\alpha)} \eta(x)(\mu(s_{in} - x) - \bar{D}) dx$, $\alpha \in (\beta_T^{-1}(\bar{x}), \bar{x})$

On a $F(\bar{x}) > 0$, $F(\beta_T^{-1}(\bar{x})) < 0$ et

$$F'(\alpha) = \underbrace{\eta(\beta_T(\alpha))(\mu(s_{in} - \beta_T(\alpha)) - \bar{D})}_{>0} \beta'_T(\alpha) - \eta(\alpha) \underbrace{(\mu(s_{in} - \alpha) - \bar{D})}_{<0} > 0$$

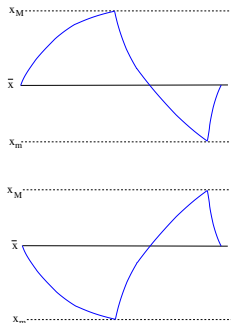
$\Rightarrow \exists! \alpha^* \in (\beta_T^{-1}(\bar{x}), \bar{x})$ t.q. $F(\alpha^*) = 0$ (cf Eq. 2)

Donc $x_m = \alpha^*$, $x_M = \beta_T(\alpha^*)$ t.q. $F(x_m) = 0$ sont uniques.

Optimalité des solutions bang-bang

$$u_T^{BB+}(t) = \begin{cases} D_-, & t \in [0, t_M) \cup [t_m, T) \\ D_+, & t \in [t_M, t_m) \end{cases}$$

$$u_T^{BB-}(t) = \begin{cases} D_+, & t \in [0, t_m) \cup [t_M, T) \\ D_-, & t \in [t_m, t_M) \end{cases}$$



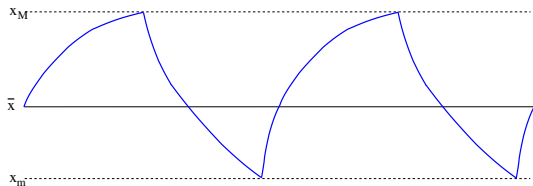
ont la même orbite périodique.

Commutations seulement aux points extrémaux

\Rightarrow une solution optimale est T/n périodique avec $u_{T/n}^{BB+}$ ou $u_{T/n}^{BB-}$
($n \geq 1$)

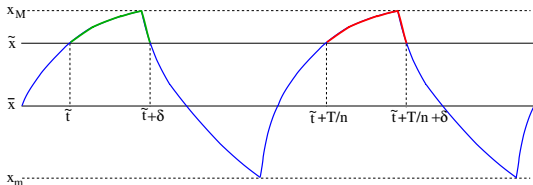
Technique de "swap"

Si $n > 2$



Soit $\bar{x} < \tilde{x} < x_M$ et

$$\{t \in (0, T), x(t) = \tilde{x}\} = \{\tilde{t}, \tilde{t} + \delta, \tilde{t} + T/N, \tilde{t} + T/N + \delta, \dots\}$$

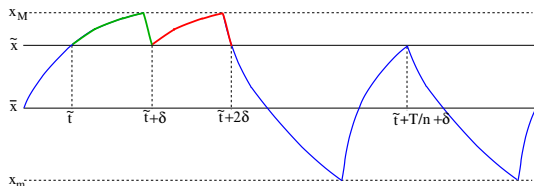


Technique de "swap"

La commande

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0, \tilde{t} + \delta) \\ u(t + T/N - \delta) & t \in [\tilde{t} + \delta, \tilde{t} + 2\delta) \\ u(t + \delta) & t \in [\tilde{t} + 2\delta, \tilde{t} + T/n + \delta) \\ u(t) & t \in [\tilde{t} + T/n + \delta, 2T/n) \end{cases}$$

est admissible et possède le même coût, donc doit être optimale



mais présente une commutation en dehors de x_m, x_M :
contradiction

Cas non convexe

Hypothèse. μ est croissant et il existe $s_c \in (0, s_{in})$ tel que

- μ est strictement convexe sur $(0, s_c)$,
- μ est strictement concave sur (s_c, s_{in})

(résultats analogues sur μ concave puis convexe)

On pose $x_c = s_{in} - s_c$.

Soit une solution optimale,

- si $x_M \leq x_c$, alors $u \equiv \bar{D}$ est nécessairement optimal,
- si $x_m \geq x_c$, alors $u_T^{BB\pm}$ est nécessairement optimal

→ on étudie le cas $x_m < x_c < x_M$,

Condition de corde/pente

- ▶ condition de corde: au plus un point de commutation autre que x_m, x_M (sinon 3 points de commutation dans la partie convexe ou concave...)
- ▶ condition de pente: arc singulier de la forme $x = x_s$ constant sur $[t_s, t_s + \tau]$
 - si $x_s > x_c$, alors une solution BB_τ^{pm} est localement meilleure
 - si $x_s > x_m$, on a

$$\mu'(s_{in} - x_s) = \frac{\mu(s_{in} - x_M) - \mu(s_{in} - x_s)}{x_M - x_c} :$$

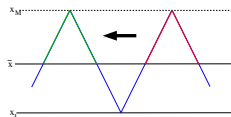
contradiction avec μ strictement concave sur (s_c, s_{in})

Donc, les seuls arcs singuliers possibles sont $x = x_m$

Technique de "swap"

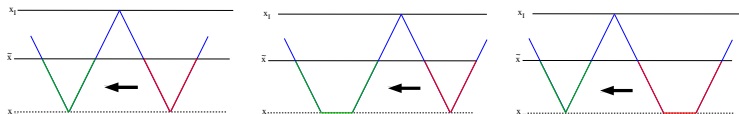
Supposons une commutation $x_I \notin \{x_m, x_M\}$

- ▶ si commutation $D_+ \rightarrow D_-$, soit $\tilde{x} \in (x_I, x_M)$



→ on crée une autre solution optimale avec une commutation en \tilde{x} ...

- ▶ si commutation $D_- \rightarrow D_+$, soit $\tilde{x} \in (x_m, x_I)$



→ on crée une autre solution optimale avec une commutation en \tilde{x} ...

Donc, les seules commutations sont en x_m et x_M

Commande bang-singulier-bang

$$u_T^{BSB+}(t, \delta) = \begin{cases} D_-, & t \in [0, t_1) \cup [t_2 + \delta, T) \\ D_+, & t \in [t_1, t_2) \\ \mu(s_{in} - x(t_2)), & t \in [t_2, t_2 + \delta] \end{cases} \quad \delta \in [0, T]$$

$$u_T^{BSB-}(t, \delta) = \begin{cases} D_+, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T) \\ D_-, & t \in [t_1 + \delta, t_2) \\ \mu(s_{in} - x(t_1)), & t \in [t_1, t_1 + \delta] \end{cases} \quad \delta \in [0, T]$$

Lemme. $\exists!(t_1, t_2)$ tel que $x(T) = \bar{x}$ et $\langle u \rangle_T = \bar{D}$, la paire (x_m, x_M) étant l'unique solution de

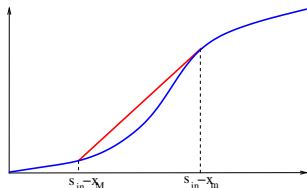
$$\int_{x_m}^{x_M} \eta(x) dx = T - \delta \quad \text{at} \quad \int_{x_m}^{x_M} \eta(x) \mu(s_{in} - x) dx = T \bar{D} - \delta \mu(s_{in} - x_m)$$

Commande optimale

Proposition.

- i. $\exists \delta^* \in [0, T]$ tel que $u_T^{BSB^+}(\cdot, \delta^*)$ ou $u_T^{BSB^-}(\cdot, \delta^*)$ est optimal.
- ii. si $\delta^* \in (0, T)$, la condition de pente est vérifiée

$$\mu'(s_{in} - x_m) = \frac{\mu(s_{in} - x_M) - \mu(s_{in} - x_S)}{x_M - x_m}$$



Remarque.

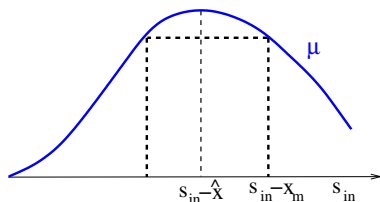
μ strictement convexe $\Rightarrow \delta^* = 0$ (solution BB)

μ concave $\Rightarrow \delta^* = T$ (solution constante)

► en pratique: $\max_{\delta} J_T(u_T^{BSB^+}(\cdot, \delta))$

Le cas non monotone

$$x_m < \hat{x} < \bar{x} < x_M \text{ où } \hat{x} = \arg \max_{x \in (0, s_{in})} \mu(s_{in} - x)$$



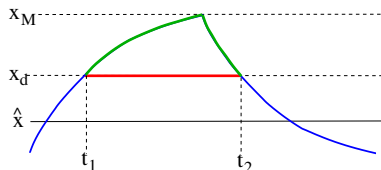
Soit $\tilde{x}_M = \min(x_M, \max\{x ; \mu(s_{in} - x) = \mu(s_{in} - x_m)\}) > \hat{x}$ et

$$g(\tilde{x}) := \mu(s_{in} - \tilde{x}) \int_{x_m}^{\tilde{x}} \eta(x) dx, \quad h(\tilde{x}) := \int_{x_m}^{\tilde{x}} \eta(x) \mu(s_{in} - x) dx$$

On a $h(\hat{x}) < g(\hat{x})$ et $h(\tilde{x}_M) > g(\tilde{x}_M) \Rightarrow \exists x_d \in (\hat{x}, \tilde{x}_M)$ t.q. $g(x_d) = h(x_d)$

Le cas non monotone

Soit $t_1 < t_2$ t.q. $x(t_1) = x(t_2) = x_d$, $x(t) > x_d$, $t \in [t_1, t_2]$



$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \mu(s_{in} - x_d), & t \in [t_1, t_2] \\ u(t), & t \in [0, T] \setminus [t_1, t_2] \end{cases} \quad \text{est admissible}$$

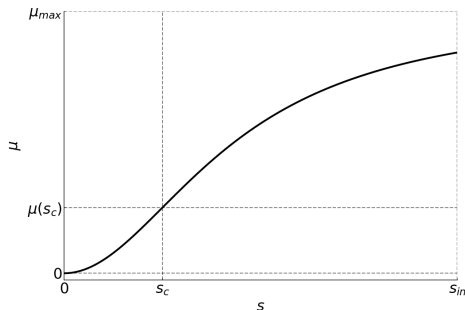
$$J_T(\tilde{u}) = \frac{1}{T} \int_{[0, T] \setminus [t_1, t_2]} x(t) dt + x_d(t_2 - t_1) < \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Une solution optimale reste dans le domaine où μ est croissant.

Illustration

$$\mu(s) = \frac{2s^2}{3 + s^2}, \quad s_{in} = 4, \quad D_- = 0, \quad D_+ = 2, \quad T = 24$$

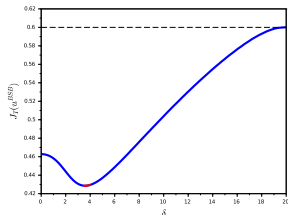
$$\rightarrow \inf_{u(\cdot)} \langle s \rangle_T = s_{in} - \langle x \rangle_T$$



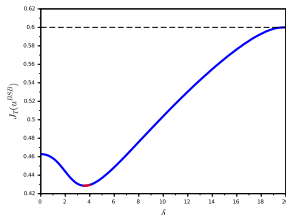
$$s_c = 1, \quad \mu(s_c) = 0.5$$

Détermination des meilleures BSB

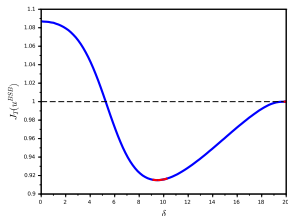
$$\bar{D} = 0.214$$



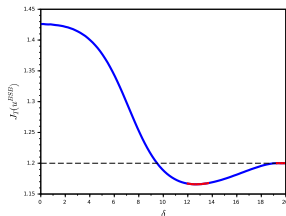
$$\bar{D} = 0.352$$



$$\bar{D} = 0.500$$

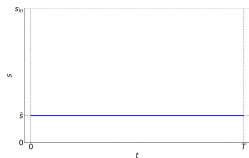


$$\bar{D} = 0.649$$

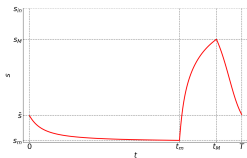


*en pointillés: coût du contrôle constant
en rouge: condition de pente vérifiée*

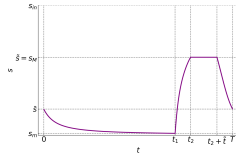
Comparaison des stratégies



constant



BB



BSB optimisé

\bar{D}	coût de $u = \bar{D}$	coût de BB	coût de BSB optimal
0.214	0.6	0.462	0.428
0.352	0.8	0.756	0.663
0.500	1.0	1.086	0.915
0.649	1.2	1.425	1.166

Complément

$$\begin{cases} \dot{z} = D(t)(s_{in} - z) \\ \dot{x} = (\mu(z - x) - D(t))x \end{cases} \text{ avec } D(\cdot) \text{ continu par morceaux}$$

Supposons $z(0) > s_{in}$. Soit

$$\begin{cases} \underline{x}(\cdot) \text{ la solution de } \dot{\underline{x}} = (\mu(s_{in} - \underline{x}) - D(t))\underline{x}, \underline{x}(0) = x(0) \\ x_n(\cdot) \text{ la solution de } \dot{x}_n = (\mu(s_{in} + 1/n - x) - D(t))x, x(0) = z(0) \end{cases}$$

- ▶ $\underline{x}(\cdot)$ converge vers une solution périodique $x^*(\cdot)$
- ▶ $\forall n, \underline{x}_n(\cdot)$ converge vers une solution périodique $x_n^*(\cdot)$
- ▶ $x_n^*(\cdot) \rightarrow x^*(\cdot)$ pour $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \text{Or } \forall n, \quad & \exists N_1, z(t) \leq s_{in} + 1/n, t \geq N_1 T \\ & \exists N_2, x_n(kT) \leq x_n^*(kT) + 1/n, k \geq N_2 \\ & \exists N_3, x^*(kT) - 1/n \leq \underline{x}(kT), k \geq N_3 \\ & \exists N_4, x_n^*(kT) \leq x^*(kT) + 1/n, k \geq N_4 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $N = \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$, on a

$$x^*(kT) - 1/n \leq \underline{x}(kT) \leq x(kT) \leq x_n(kT) \leq x_n^*(kT) + 2/n, k \geq N$$