Etude mathématique et numérique de quelques modèles biologiques du Chemostat

Modèles mathématiques de digestion anaérobie

N. Abdellatif

ENSI - Université de Manouba

LAMSIN - ENIT - Université Tunis El Manar

Ecole CIMPA "Vert numérique"

Hammamet, 24 Sept - 03 Oct 2022

La digestion anaérobie (DA)

- La DA est un processus biologique utilisé dans le traîtement des eaux usées.
- La matière organique est transformée par des microorganismes en biogaz (méthane et dioxyde de carbone ...) en absence d'oxygène.
- Production de méthane (énergie renouvelable), les systèmes aérobies nécessitent de l'énergie.
- Avantages de la DA :
  - Dégradation d'effluents complexes et concentrés
  - Faible production de boues
  - Faibles coûts

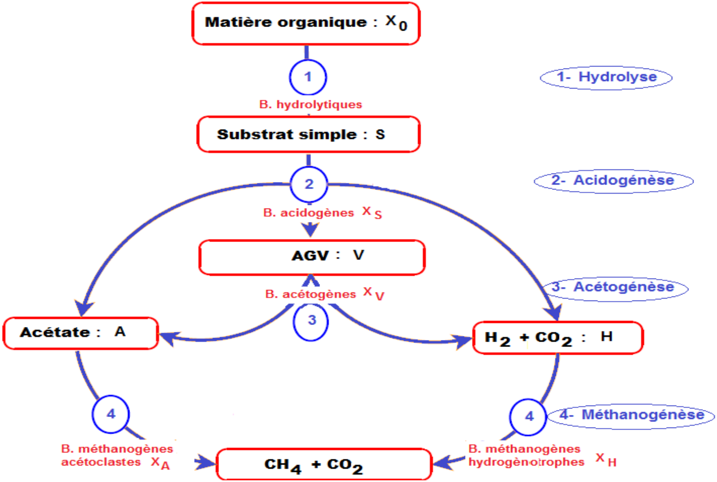


Figure 1 – Le processus de la digestion anaérobie.

- La DA est un processus complexe avec un grand nombre de réactions biologique entre differents types de microorganismes.

- Plusieurs modèles ont été proposés pour décrire ce processus (ADM1, modèles à trois étapes, AM2...).

- Le modèle ADM1 (Anaerobic Digestion Model N 1) est le modèle le plus complet pour décrire la DA, avec 32 équations differentielles et un grand nombre de paramètres.

- Des modèles plus simples (à deux étapes, à trois étapes...) ont été utilisés pour le contrôle des digesteurs anaérobie.

Modèle à deux étapes

$$k_1 S_1 \xrightarrow{\mu_1} X_1 + k_2 S_2, \qquad k_3 S_2 \xrightarrow{\mu_2} X_2 + k_4 \mathsf{CH}_4$$

k_i les coefficients stochiometriques associés aux bioréactions

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{S}_1 & = D(S_1^{in} - S_1) - k_1\mu_1(S_1)X_1, \\ \dot{X}_1 & = (\mu_1(S_1) - \alpha D)X_1, \\ \dot{S}_2 & = D(S_2^{in} - S_2) + k_2\mu_1(S_1)X_1 - k_3\mu_2(S_2)X_2, \\ \dot{X}_2 & = (\mu_2(S_2) - \alpha D)X_2. \end{array}\right. \tag{1}$$

- Dans la première étape, le substrat S_1 est consommé par les bactéries acidogènes X_1 et produit un substrat S_2 (AGV)
- Dans la seconde étape, les bactéries methanogènes X_2 consomme S_2 et produisent du méthane.

Analyse mathématique de modèles de DA

1

- HYDROLYSE

Macro-molécules $X_0 \xrightarrow{r_0} k_0 S_1$

- ACIDOGENÈSE

Monomères $k_1 S_1 \xrightarrow{\mu_1} X_1 + k_2 S_2$

- MÉTHANOGENÈSE

Acides organiques $k_3 S_2 \xrightarrow{\mu_2} X_2 + k_4 \mathrm{CH}_4$

1. R. Fekih-Salem, N. Abdellatif, T. Sari, J. Harmand — Mathematical analysis of a three-stage anaerobic digestion model, ARIMA Journal, Vol 17 (2014).

Modélisation de l'hydrolyse :

- Phénomène purement enzymatiques sans compartiment microbien hydrolytique. La vitesse de réaction

$$r_0 = k_{hyd} X_0.$$

- Le rôle majeur des bactéries hydrolytiques : Substrat lentement biodégradable X_0 peut étre dégradé par la bactérie hydrolytique X_1. La vitesse de réaction

$$r_0 = \mu_0(X_0) X_1.$$

Modèle à trois étapes

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{X}_0 & = & DX_{0in} - \alpha DX_0 - r_0, \\ \dot{S}_1 & = & D(S_{1in} - S_1) + k_0 r_0 - k_1\mu_1(S_1)X_1, \\ \dot{X}_1 & = & (\mu_1(S_1) - \alpha D)X_1, \\ \dot{S}_2 & = & D(S_{2in} - S_2) + k_2\mu_1(S_1)X_1 - k_3\mu_2(S_2)X_2, \\ \dot{X}_2 & = & (\mu_2(S_2) - \alpha D)X_2,\end{array}\right. \qquad (2)$$

$$D = \frac{Q_{in}}{V} \quad \text{et} \quad \frac{Q_{in} - Q_{out}}{V} = \alpha D, \quad \alpha \in [0, 1].$$

$r_0 = k_{hyd} X_0$

$$X_0 \xrightarrow{\text{converge globalement}} X_0^* = \frac{D}{k_{hyd} + \alpha D} X_{0in}.$$

À l'équilibre de X_0, les quatre dernières équations de (2) se réduisent au modéle AM2

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}_1 = D(S_{1in}^* - S_1) - k_1 \mu_1(S_1) X_1, \\ \dot{X}_1 = [\mu_1(S_1) - \alpha D] X_1. \\ \dot{S}_2 = D(S_{2in} - S_2) + k_2 \mu_1(S_1) X_1 - k_3 \mu_2(S_2) X_2, \\ \dot{X}_2 = (\mu_2(S_2) - \alpha D) X_2, \end{array} \right. \tag{3}$$

$$S_{1in}^* = S_{1in} + \frac{k_0 k_{hyd}}{k_{hyd} + \alpha D} X_{0in}.$$

À chaque équilibre $F = (S_1^*, X_1^*, S_2^*, X_2^*)$ de (3) correspond un équilibre $E = (X_0^*, S_1^*, X_1^*, S_2^*, X_2^*)$ de (2).
La stabilité locale de E est déduite de celle des équilibres correspondants F de (2).[2]

2. B. Benyahia, T.Sari, B.Cherki, J. Harmand, Bifurcation and stability analysis of a two step model for monitoring anaerobic digestion processes, *Journal of Process Control*, 22 (2012), 1008–1019.

Equilibres

H1 : $\mu_1'(S_1) > 0$, $\mu_1(0) = 0$ et $\mu_1(S_1) = \alpha D$ admet une unique solution

$$\lambda_1 = \mu_1^{-1}(\alpha D).$$

H2 : $\mu_2(.)$ est non monotone, $\mu_2(0) = 0$ et $\mu_2(S_2) = \alpha D$ admet deux solutions $\lambda_2^i, \quad i = 1, 2 : \quad \lambda_2^1 < \lambda_2^2$.

Proposition

Les points d'équilibre de (2)

1. $E_0 = (X_0^*, S_{1in}^*, 0, S_{2in}, 0)$ *qui existe toujours.*
2. $E_1^i = (X_0^*, S_{1in}^*, 0, \lambda_2^i, X_2^i)$ *qui existe ssi* $S_{2in} > \lambda_2^i$;
   $X_2^i = \frac{1}{k_3\alpha}(S_{2in} - \lambda_2^i)$.
3. $E_2^0 = (X_0^*, \lambda_1, X_1^*, S_{2in}^*, 0)$ *qui existe ssi* $S_{1in}^* > \lambda_1$;
   $X_1^* = \frac{1}{k_1\alpha}(S_{1in}^* - \lambda_1)$ *et* $S_{2in}^* = S_{2in} + \frac{k_2}{k_1}(S_{1in}^* - \lambda_1)$.
4. $E_2^i = (X_0^*, \lambda_1, X_1^*, \lambda_2^i, X_2^{*i})$ *qui existe ssi* $S_{1in}^* > \lambda_1$ *et* $S_{2in}^* > \lambda_2^i$;
   $X_2^{*i} = \frac{1}{k_3\alpha}(S_{2in}^* - \lambda_2^i)$.

La condition d'existence de X_1 dans AM2 est $\lambda_1 < S_{1in}$. La condition d'existence de X_1 dans le modèle d'hydrolyse devient $\lambda_1 < S_{1in}^*$.

Modèle avec compartiment microbien hydrolytique

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{X}_0 = D(X_{0in} - \alpha X_0) - \mu_0(X_0)X_1,\\ \dot{S}_1 = D(S_{1in} - S_1) + k_0\mu_0(X_0)X_1 - k_1\mu_1(S_1)X_1,\\ \dot{X}_1 = [\mu_1(S_1) - \alpha D]X_1.\end{array}\right. \tag{4}$$

H3 : $\mu_0'(X_0) > 0$ et $\mu_0''(X_0) \leqslant 0$.

- $X_0 = 0$: l'équilibre de lessivage $E_0 = \left(\frac{X_{0in}}{\alpha}, S_{1in}, 0\right)$.
- $X_0 \neq 0$, alors

$$X_1 = \xi(X_0) = \frac{D(X_{0in} - \alpha X_0)}{\mu_0(X_0)}.$$

et

$$X_1 = \delta(X_0) = \frac{1}{k_1\alpha}[(S_{1in} - \lambda_1) + k_0(X_{0in} - \alpha X_0)].$$

- La fonction $\xi(\cdot)$ s'annule en $\frac{X_{0in}}{\alpha}$, est décroissante et convexe.
- $\xi'(X_0) = -\frac{k_0}{k_1}$ admet une unique solution $\bar{X}_0 \in \left]0, \frac{X_{0in}}{\alpha}\right[$ ssi
$$\xi'\left(\frac{X_{0in}}{\alpha}\right) > -\frac{k_0}{k_1}.$$
- Soit $\bar{X}_1 = \xi(\bar{X}_0)$ et $\bar{S}_{1in}$ la valeur de S_{1in} telle que $\bar{X}_1 = \delta(\bar{X}_0)$.

Cas $\xi'(X_{0in}) > -\frac{k_0}{k_1}$

Proposition

- *Si* $S_{1in} < \bar{S}_{1in}$*, alors il n'existe aucun équilibre strictement positif.*
- *Si* $S_{1in} = \bar{S}_{1in}$*, alors il existe un unique équilibre strictement positif* $\bar{E}_1$*.*
- *Si* $\bar{S}_{1in} < S_{1in} < \lambda_1$*, alors il existe deux équilibres strictement positifs* E_1^* *et* E_1^{**}*.*
- *Si* $\lambda_1 \leqslant S_{1in}$*, alors il existe un unique équilibre strictement positif* E_1^**.*

Cas $\xi'(X_{0in}) \leq -\frac{k_0}{k_1}$

Proposition

- *Si* $S_{1in} \leq \lambda_1$, *alors il n'existe aucun équilibre strictement positif.*
- *Si* $S_{1in} > \lambda_1$, *alors il existe un unique équilibre strictement positif* $\bar{E}_1$.

Stabilité locale

Proposition

- E_0 *est LES ssi* $\mu_1(S_{1in}) < \alpha D$.
- *Si* E_1^* *existe, alors il est LES.*
- *Si* E_1^{**} *existe, alors il est instable.*

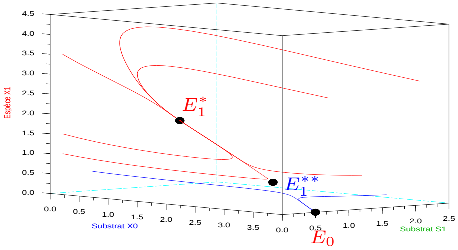


Figure 2 – Bistabilité de E_0 et E_1^*.

Cas non monotone

H3 : μ_1 est positive non monotone, $\mu_1(0) = 0$ et $\mu_1(S_1) = \alpha D$ admet deux solutions λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

- L'équilibre du lessivage existe toujours.
- Il existe 0, 1,...,4 équilibres positifs
- Même comportement de stabilité que le cas monotone, sauf pour les équilibres qui correspondent à λ_2
- Un équilibre instable et un équilibre qui peut être stable.

[3]

3. R. Fekih Salem, Thèse de doctorat : Modèles mathématiques pour la compétition et la coexistence des espèces microbiennes dans un Chémostat, ENIT & Université de Montpellier, 2013

Taux de croissance densité-dépendant

$$\mu_0(\cdot) = \mu_0(X_0, X_1)$$

H4 : $\mu_0(0, X_1) = 0$ et $\mu_0(X_0, X_1) > 0$

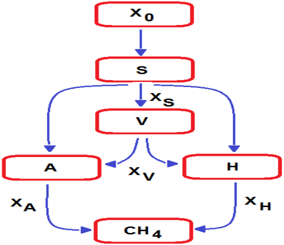
H5 : $\frac{\partial \mu_0}{\partial X_0}(X_0, X_1) > 0$ et $\frac{\partial \mu_0}{\partial X_1}(X_0, X_1) < 0$

- L'équilibre du lessivage existe toujours et peut être GAS.
- Multiplicité des équilibres positifs.
- Dans le cas d'un nombre pair, existence d'un équilibre instable et un équilibre qui peut être stable.

4

4. R. Fekih Salem, Thèse de doctorat : Modèles mathématiques pour la compétition et la coexistence des espèces microbiennes dans un Chémostat, ENIT & Université de Montpellier, 2013

1. Modèle de DA à 4 étapes avec hydrolyse enzymatique
2. Modèle de DA à 4 étapes avec hydrolyse microbienne
   - Modèle sans inhibition
   - Modèle avec inhibition



5

5. Y. Daoud, N. Abdellatif, J. Harmand, Modèeles mathématiques de digestion anaérobie : effet de l'hydrolyse sur la production du biogaz. ARIMA, 2019, Volume 28, Mathematics for Biology and the Environment.

Modèle de DA à 4 étapes

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s} g_S(S) X_S \\ \frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D) X_S \\ \frac{dV}{dt} = -DV + \gamma_{sv} g_S(S) X_S - \frac{1}{c_v} g_V(V,H) X_V \\ \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V,H) - D) X_V \\ \frac{dA}{dt} = -DA + \gamma_{sa} g_S(S) X_S + \gamma_{va} g_V(V,H) X_V - \frac{1}{c_a} g_A(A) X_A \\ \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D) X_A \\ \frac{dH}{dt} = -DH + \gamma_{sh} g_S(S) X_S + \gamma_{vh} g_V(V,H) X_V - \frac{1}{c_h} g_H(H,A) X_H \\ \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H,A) - D) X_H. \end{cases}$$

M. Weedermann, G. Seo and G.S.K.Wolkowicz, (2013), *Mathematical model of anaerobic digestion in a chemostat : effects of syntrophy and inhibition ; Journal of Biological Dynamics, 7(1), pp 59-85.*

- X_{0in} est la concentration du substrat lentement dégradable ou matière organique à l'entrée du chémostat,
- S_{in} est la concentration du substrat soluble à l'entrée du chémostat,
- D est le taux de dilution,
- $g_S(.)$, $g_A(.)$, $g_V(.,.)$ et $g_H(.,.)$ sont les fonctions de croissance microbienne.
- c_s, c_v, c_a, c_h sont les coefficients de rendement des bactéries,
- γ_{sv}, γ_{sa}, γ_{sh}, γ_{va}, γ_{vh} sont des rapports entre le rendement du produit et le rendement de la biomasse,

avec

$$1 + \gamma_{sv} + \gamma_{sa} + \gamma_{sh} \leqslant \frac{1}{c_s},$$

$$1 + \gamma_{va} + \gamma_{vh} \leqslant \frac{1}{c_v}, \quad 1 \leqslant \frac{1}{c_a} \quad \text{et} 1 \leqslant \frac{1}{c_h}.$$

- X_{0in} est la concentration du substrat lentement dégradable ou matière organique à l'entrée du chémostat,
- S_{in} est la concentration du substrat soluble à l'entrée du chémostat,
- D est le taux de dilution,
- $g_S(.)$, $g_A(.)$, $g_V(.,.)$ et $g_H(.,.)$ sont les fonctions de croissance microbienne.
- c_s, c_v, c_a, c_h sont les coefficients de rendement des bactéries,
- γ_{sv}, γ_{sa}, γ_{sh}, γ_{va}, γ_{vh} sont des rapports entre le rendement du produit et le rendement de la biomasse,

avec

$$1 + \gamma_{sv} + \gamma_{sa} + \gamma_{sh} \leqslant \frac{1}{c_s},$$

$$1 + \gamma_{va} + \gamma_{vh} \leqslant \frac{1}{c_v}, \quad 1 \leqslant \frac{1}{c_a} \quad \text{et} 1 \leqslant \frac{1}{c_h}.$$

Modèle de DA à 4 étapes avec hydrolyse

$$
\begin{cases}
\frac{dX_0}{dt} = D(X_{0in} - X_0) - r_0 \\
\frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s} g_S(S) X_S + k_0 r_0 \\
\frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D) X_S \\
\frac{dV}{dt} = -DV + \gamma_{sv} g_S(S) X_S - \frac{1}{c_v} g_V(V,H) X_V \\
\frac{dX_V}{dt} = (g_V(V,H) - D) X_V \\
\frac{dA}{dt} = -DA + \gamma_{sa} g_S(S) X_S + \gamma_{va} g_V(V,H) X_V - \frac{1}{c_a} g_A(A) X_A \\
\frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D) X_A \\
\frac{dH}{dt} = -DH + \gamma_{sh} g_S(S) X_S + \gamma_{vh} g_V(V,H) X_V - \frac{1}{c_h} g_H(H,A) X_H \\
\frac{dX_H}{dt} = (g_H(H,A) - D) X_H.
\end{cases}
$$

$$r_0 = k_{hyd} X_0$$

$g_V(V) = g_V(V,0)$ et $g_H(H) = g_H(H,0)$

(H1) $g_S(0) = 0$ et $g'_S(.) > 0$ pour $S > 0$.
(H2) $g_V(0) = 0$ et $g'_V(.) > 0$ pour $V > 0$.
(H3) $g_A(0) = 0$ et $g'_A(.) > 0$ pour $A > 0$.
(H4) $g_H(0) = 0$ et $g'_H(.) > 0$ pour $H > 0$.

Pour $l = S, V, A$ et H, on note λ_l la solution de l'équation $g_l(\lambda_l) = D$, si elle existe et $\lambda_l = +\infty$, sinon.

Proposition

Pour des valeurs initiales positives, les solutions du système (5) restent positives et bornées, pour tout $t \geq 0$.

$$Z = k_0 X_0 + S + \frac{1}{c_s} X_S + V + \frac{1}{c_v} X_V - \gamma_{sv} X_S + A + \frac{1}{c_a} X_A - \gamma_{va} X_V$$

$$-\gamma_{sa} X_S + H + \frac{1}{c_h} X_H - \gamma_{vh} X_V - \gamma_{sh} X_S.$$

vérifie

$$\frac{dZ}{dt} = D(S_{in}^{+} - Z), \text{avec} S_{in}^{+} = (k_0 X_{0in} + S_{in})$$

et

$$Z(t) \leqslant max(Z(0), k_0 X_{0in} + S_{in}), \ \ pour \ \ tout \ \ t \geqslant 0.$$

La première équation

$$\frac{dX_0}{dt} = DX_{0in} - (D + k_{hyd})X_0$$

peut être découplée du reste du système.
A l'équilibre, X_0 converge globalement vers $X_0^* = \frac{D}{D+k_{hyd}} X_{0in}$.

Les équations en S, X_S sont indépendantes des variables V, A et H.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s} g_S(S) X_S + k_0 k_{hyd} X_0^* \\ \frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D) X_S \end{array} \right. \quad (5)$$

- Si $S_{in}^* = S_{in} + \frac{k_0 k_{hyd}}{D} X_0^* < \lambda_S$ alors $(S_{in}^*, 0)$ est le seul équilibre de (5). Il est globalement asymptotiquement stable.
- Si $S_{in}^* > \lambda_S$ alors l'équilibre (λ_S, X_S^*) existe. Il est globalement asymptotiquement stable et l'équilibre $(S_{in}^*, 0)$ est instable.

Sous les hypothèses (**H1**)-(**H4**), on a

Équilibre	X_0	S	X_S	V	X_V	A	X_A	H	X_H
E_l	X_0^*	S_{in}^*	0	0	0	0	0	0	0
E_0	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	$H^{(0)}$	0
E_H	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	λ_H	$c_h(H^{(0)} -\lambda_H)$
E_A	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	λ_A	$c_a(A^{(0)} -\lambda_A)$	$H^{(0)}$	0
E_{AH}	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	λ_A	$c_a(A^{(0)} -\lambda_A)$	λ_H	$c_h(H^{(0)} -\lambda_H)$
E_V	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} -\lambda_V)$	$\overline{A}$	0	$\overline{H}$	0
E_{VH}	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} -\lambda_V)$	$\overline{A}$	0	λ_H	$c_h(\overline{H} -\lambda_H)$
E_{VA}	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} -\lambda_V)$	λ_A	$c_a(\overline{A} -\lambda_A)$	$\overline{H}$	0
E_*	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} -\lambda_V)$	λ_A	$c_a(\overline{A} -\lambda_A)$	λ_H	$c_h(\overline{H} -\lambda_H)$

Sous les hypothèses (**H1**) - (**H4**), on a

L'équilibre	Conditions d'existence	Conditions de S. Globale
E_l	toujours	$S_{in}^* < \lambda_S$
E_0	$S_{in}^* > \lambda_S$	$A^{(0)} < \lambda_A$, $H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
E_H	$H^{(0)} > \lambda_H$	$A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
E_A	$A^{(0)} > \lambda_A$	$H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
E_{AH}	$A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$	$V^{(0)} < \lambda_V$
E_V	$V^{(0)} > \lambda_V$	$\overline{A} < \lambda_A$ et $\overline{H} < \lambda_H$
E_{VH}	$V^{(0)} > \lambda_V$ et $\overline{H} > \lambda_H$	$\overline{A} < \lambda_A$
E_{VA}	$V^{(0)} > \lambda_V$ et $\overline{A} > \lambda_A$	$\overline{H} < \lambda_H$
E_*	$V^{(0)} > \lambda_V$, $\overline{A} > \lambda_A$ et $\overline{H} > \lambda_H$	dès qu'il existe

Le plan $(D,\ S_{in})$ est divisé en cinq régions :

Condition	Région	E_l	E_0	E_H	E_A	E_{AH}	E_V	E_{VH}	E_{VA}	E_*
$S_{in} < F(D)$	R_1	S								
$S_{in} > F(D)$ et $S_{in} < K_H(D) + F(D)$	R_2	I	S							
$S_{in} > K_H(D) + F(D)$ et $S_{in} < K_A(D) + F(D)$	R_3	I	I	S						
$S_{in} > K_A(D) + F(D)$ et $S_{in} < K_V(D) + F(D)$	R_4	I	I	I	I	S				
$S_{in} > K_V(D) + F(D)$	R_5	I	I	I	I	I	I	I	I	S

Diagramme opératoire dans le plan (D, S_{in}), X_{0in} fixé

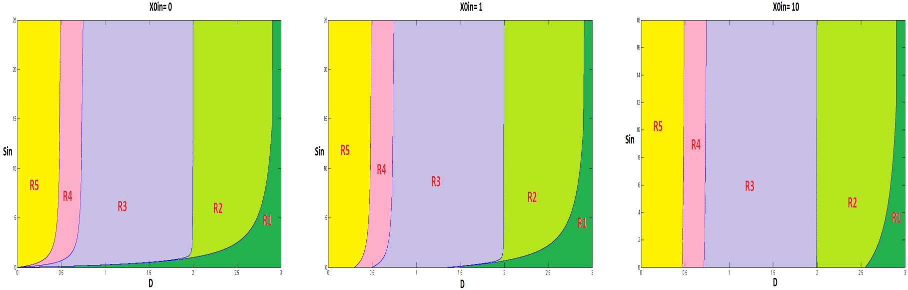
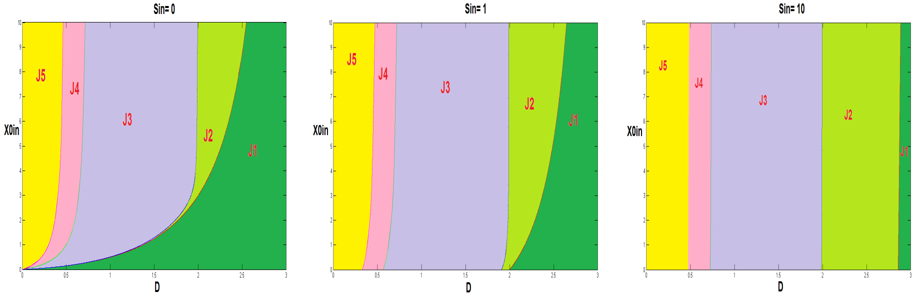


Diagramme opératoire dans le plan (D, X_{0in}), S_{in} fixé



(H1) $g_S(0) = 0$ et $g'_S(.) > 0$ pour $S > 0$.

(H5) $\forall\ V \geqslant 0$ et $H \geqslant 0$, $g_V(0, H) = 0$, $g_V(V, 0) > 0$, $\dfrac{\partial g_V}{\partial V}(V, H) > 0$, $\dfrac{\partial g_V}{\partial H}(V, H) < 0$, $\lim\limits_{H \longrightarrow +\infty} g_V(V, H) = 0$.

(H6) $\forall\ A > 0$, $g_A(0) = 0$, $\lim\limits_{A \longrightarrow +\infty} g_A(A) = 0$, $\exists\ A_{max} > 0$ / $\dfrac{dg_A}{dA}(A) > 0$, $0 < A < A_{max}$ et $\dfrac{dg_A}{dA}(A) < 0$, $A > A_{max}$.

(H7) $\forall\ H \geqslant 0$ et $A \geqslant 0$, $g_H(0, A) = 0$, $g_H(H, 0) > 0$, $\dfrac{\partial g_H}{\partial H}(H, A) > 0$, $\dfrac{\partial g_H}{\partial A}(H, A) < 0$, $\lim\limits_{H \longrightarrow +\infty} g_H(H, A) = 0$.

$\lambda_V(H)$ et $\lambda_H(A)$ sont solutions de $g_V(\lambda_V(H), H) = D$ et $g_H(\lambda_H(A), A) = D$.
λ_A^i, $i = 1, 2$ sont solutions de l'équation $g_A(A) = D$, avec $\lambda_A^1 < \lambda_A^2$.

- Si $X_S = 0$ alors $V = A = H = 0$ et $X_V = X_A = X_H = 0$.
- Si $X_S > 0$ alors $X_0 = X_0^*$, $S = S^* := \lambda_S$ et $X_S = X_S^* := c_s(S_{in}^* - \lambda_S)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = D(V^{(0)} - V) - \frac{1}{c_v} g_V(V, H) X_V \\ \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V, H) - D) X_V \\ \frac{dA}{dt} = D(A^{(0)} - A) + \gamma_{va} g_V(V, H) X_V - \frac{1}{c_a} g_A(A) X_A \\ \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D) X_A \\ \frac{dH}{dt} = D(H^{(0)} - H) + \gamma_{vh} g_V(V, H) X_V - \frac{1}{c_h} g_H(H, A) X_H \\ \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H, A) - D) X_H. \end{array} \right. \quad (6)$$

avec $V^{(0)} = \gamma_{sv} X_S^*$, $A^{(0)} = \gamma_{sa} X_S^*$ et $H^{(0)} = \gamma_{sh} X_S^*$.

Le modèle avec inhibition possède douze points d'équilibres :

- Un équilibre E_1 de lessivage de tous les espèces.
- Deux équilibres E_{11} et E_{12} de coexistence.
- Deux équilibres E_9 et E_{10} de lessivage de X_H.
- Deux équilibres E_5 et E_6 de lessivage de X_V.
- Deux équilibres E_3 et E_4 de lessivage de X_H et X_V.
- Un équilibre E_2 de lessivage de X_A et X_V.
- Un équilibre E_7 de lessivage de X_A et X_H.
- Un équilibre E_8 de lessivage de X_A.

L'équilibre	Conditions de stabilité locale
E_1	$V^{(0)} < \lambda_V^0, (A^{(0)} < \lambda_A^1$ ou $A^{(0)} > \lambda_A^2)$ et $H^{(0)} < \lambda_H^0$
E_2	$V^{(0)} < \lambda_V(\lambda_H^0), (A^{(0)} < \lambda_A^1$ ou $A^{(0)} > \lambda_A^2)$
E_3	$V^{(0)} < \lambda_V^0$ et $H^{(0)} < \lambda_H^1$
E_4	toujours instable
E_5	$V^{(0)} < \lambda_V^1$
E_6	toujours instable
E_7	$(\hat{A} < \lambda_A^1$ ou $\hat{A} > \lambda_A^2)$ et $\hat{H} < \lambda_H(\hat{A})$
E_8	$\breve{A} < \lambda_A^1$ ou $\breve{A} > \lambda_A^2$
E_9	$\hat{H} < \lambda_H^1$
E_{10}	toujours instable
E_{11}	dès qu'il existe
E_{12}	toujours instable

$$g_S(S) = \frac{m_s S}{k_s + S}, g_A(A) = \frac{m_a A}{k_a + A + \frac{A^2}{k_I}},$$

$$g_V(V,H) = \frac{m_v V}{k_v + V + \mu_h H}, g_H(H,A) = \frac{m_h H}{k_h + H + \mu_a A}.$$

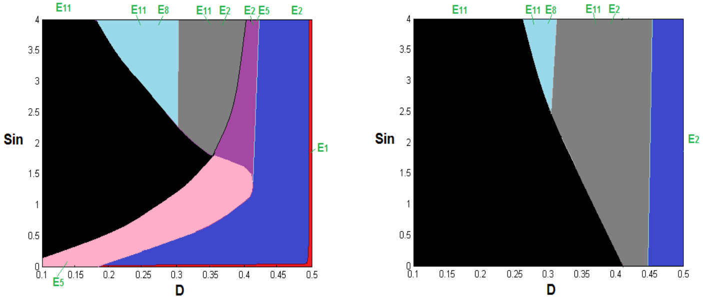


Figure 3 – Diagramme opératoire pour $X_{0in} = 1$ à gauche et $X_{0in} = 10$ à droite, avec $\mu_a = \mu_h = k_I = 1$

Modèle avec hydrolyse microbienne avec $r_0 = g_0(X_0)X_S$, $g_V(V) = g_V(V,0)$, $g_H(H) = g_H(H,0)$

Sous modèle du modèle avec hydrolyse microbienne

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = D(X_{0in} - X_0) - g_0(X_0)X_S \\ \frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s} g_S(S)X_S + k_0 g_0(X_0)X_S \\ \frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D)X_S \end{cases} \tag{7}$$

On suppose que :

(H8) $\forall\ 0 < X_0 < X_{0in}$, $g_0(0) = 0$, $g_0'(X_0) > 0$ et $g_0''(X_0) \leqslant 0$.

Sous les hypothèses (**H1**) et (**H8**), on a

L'équilibre	Conditions d'existence	Conditions de S. Locale
$F_0 = (X_{0in}, S_{in}, 0)$	existe toujours	$S_{in} < \lambda_S$
$F_1^* = (X_0^*, \lambda_S, X_S^*)$	$S_{in} > \lambda_S$	dès qu'il existe

$$\zeta(X_0) = \frac{D(X_{0in} - X_0)}{g_0(X_0)}, \quad pour \quad X_0 \in \ ]0, X_{0in}[,$$

$$\delta(X_0) = c_s[(S_{in} - \lambda_S) + k_0(X_{0in} - X_0)].$$

$$X_0^* \ et \ X_0^{**} \ sont \ les \ solutions \ de \ \zeta(X_0) = \delta(X_0), \ si \ elles \ existent.$$

$$X_S^* = \delta(X_0^*) \ et \ X_S^{**} = \delta(X_0^{**}).$$

Sous les hypothèses (**H1**) et (**H8**), on a

L'équilibre	Conditions d'existence	Conditions de S. Locale
$F_0 = (X_{0in}, S_{in}, 0)$	existe toujours	$S_{in} < \lambda_S$
$F_1^* = (X_0^*, \lambda_S, X_S^*)$	$S_{in} > \max(0, \bar{S}_{in})$	$\zeta'(X_0^*) < -c_s k_0$
$F_1^{**} = (X_0^{**}, \lambda_S, X_S^{**})$	$\max(0, \bar{S}_{in}) < S_{in}$ et $S_{in} < \lambda_S$	instable

L'équation $\zeta'(X_0) = -c_s k_0$ admet une unique solution notée $\bar{X_0}$.

$$\bar{X_S} = \zeta(\bar{X_0})$$

et

$$\bar{S}_{in} = (\frac{\bar{X_S}}{c_s} + k_0 \bar{X_0} + \lambda_S) - k_0 X_{0in}.$$

Le modèle avec hydrolyse microbienne possède dix-sept équilibres :

- Un équilibre F_l de lessivage de toutes les espèces et de V, A et H.
- Deux équilibres F_0^* et F_0^{**} de lessivage de toutes les espèces microbiennes.
- Deux équilibres de coexistence F^* et F^{**}.
- Deux équilibres F_{VA}^* et F_{VA}^{**} de lessivage de X_H.
- Deux équilibres F_{VH}^* et F_{VH}^{**} de lessivage de X_A.
- Deux équilibres F_{AH}^* et F_{AH}^{**} de lessivage de X_V.
- Deux équilibres F_V^* et F_V^{**} de lessivage de X_A et de X_H.
- Deux équilibres F_H^* et F_H^{**} de lessivage de X_A et de X_V.
- Deux équilibres F_A^* et F_A^{**} de lessivage de X_V et de X_H.

Sous les hypothèses (**H1**) - (**H4**) et (**H8**), on a

L'équilibre	Conditions de stabilité locale
F_l	$S_{in} < \lambda_S$
F_0^*	$A^{(0)} < \lambda_A$, $H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_H^*	$A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_A^*	$H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_{AH}^*	$V^{(0)} < \lambda_V$
F_V^*	$\overline{A} < \lambda_A$ et $\overline{H} < \lambda_H$
F_{VH}^*	$\overline{A} < \lambda_A$
F_{VA}^*	$\overline{H} < \lambda_H$
F^*	dès qu'il existe

Sous les hypothèses (**H1**) - (**H4**) et (**H8**), on a

L'équilibre	Conditions de stabilité locale
F_l	$S_{in} < \lambda_S$
F_0^*	$V^{(0)} < \lambda_V$, $A^{(0)} < \lambda_A$ et $H^{(0)} < \lambda_H$
F_H^*	$A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_A^*	$H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
F_{AH}^*	$V^{(0)} < \lambda_V$
F_V^*	$\overline{A} < \lambda_A$ et $\overline{H} < \lambda_H$
F_{VH}^*	$\overline{A} < \lambda_A$
F_{VA}^*	$\overline{H} < \lambda_H$
F^*	dès qu'il existe
F_0^{**}, F_H^{**}, F_A^{**}, F_{AH}^{**}, F_V^{**}, F_{VH}^{**}, F_{VA}^{**} et F^{**}	Instables

Le plan $(D,\ S_{in})$ est divisé en onze régions :

Région	F_l	F_0^*	F_H^*	F_A^*	F_{AH}^*	F_V^*	F_{VH}^*	F_{VA}^*	F_*
R_1	S								
R_2	I	S							
R_3	I	I	S						
R_4	I	I	I			I	S		
R_5	I	I	I	I	I	I	S		
R_6	I	I	I	I	I	I	I	I	S
R_7	I	I		I		I	I	I	S
R_8	I	I		I		I	S		
R_9	I	I				I	S		
R_{10}	I	I		S					
R_{11}	I	I		I		I		S	

Diagramme opératoire, dans le plan (D, S_{in}), X_{0in} fixé

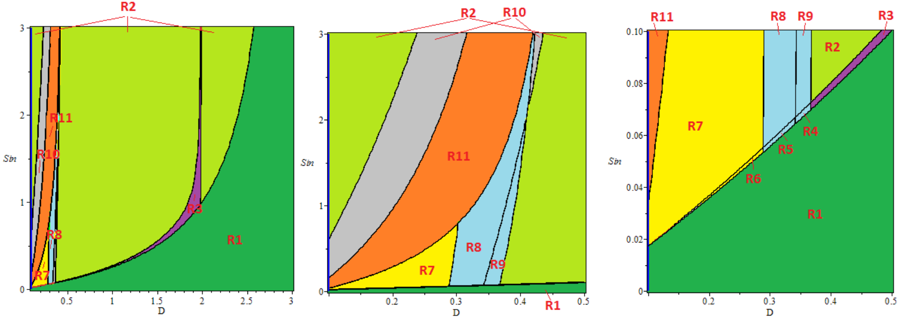


Figure 4 – Diagramme opératoire pour $X_{0in} = 1$ et $D \geqslant F_{01}$.

$$g_0(X_{0in}) \leqslant \frac{D}{c_s k_0} \Leftrightarrow D \geqslant F_{01}$$

Taux de biogaz produit

$$Q_{CH_4} = \alpha_1 g_A(A_{|_{A=A^*}}) X_{A|_{X_A = X_A^*}} + \alpha_2 g_H(H_{|_{H=H^*}}) X_{H|_{X_H = X_H^*}}$$

avec $\alpha_1 = \frac{1-c_a}{c_a}$ et $\alpha_2 = \frac{1-c_h}{c_h}$.

Équilibre	Q_{CH_4}
E_l, E_0 et E_V	0
E_H	$\alpha_2 c_h D(H^{(0)} - \lambda_H)$
E_A	$\alpha_1 c_a D(A^{(0)} - \lambda_A)$
E_{AH}	$\alpha_1 c_a D(A^{(0)} - \lambda_A) + \alpha_2 c_h D(H^{(0)} - \lambda_H)$
E_{VH}	$\alpha_2 c_h D(\overline{H} - \lambda_H)$
E_{VA}	$\alpha_1 c_a D(\overline{A} - \lambda_A)$
E_*	$\alpha_1 c_a D(\overline{A} - \lambda_A) + \alpha_2 c_h D(\overline{H} - \lambda_H)$

On rappelle $\overline{A} = A^{(0)} + \gamma_{va} c_v (V^{(0)} - \lambda_V)$ et $\overline{H} = H^{(0)} + \gamma_{vh} c_v (V^{(0)} - \lambda_V)$.

1. Si $V^{(0)} > \lambda_V$, $\overline{A} > \lambda_A$ et $\overline{H} > \lambda_H$ alors le taux de méthane est maximal à l'équilibre E_*.
2. Si $V^{(0)} < \lambda_V$, $A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$ alors le taux de méthane est maximal à l'équilibre E_{AH}.

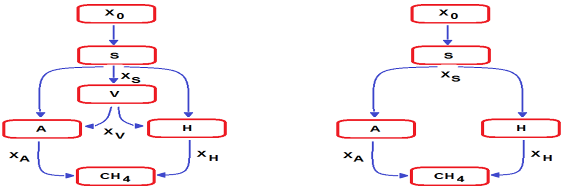


Figure 5 – Le flux de méthane dans le cas (1) à gauche et dans le cas (2) à droite

Le taux de méthane produit pour le modèle avec hydrolyse enzymatique sans inhibition

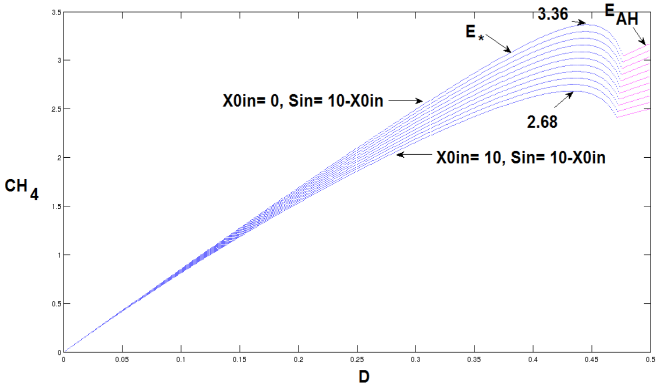


Figure 6 – La variation des taux de méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 10$.

Le taux d'hydrogène produit pour le modèle avec hydrolyse enzymatique sans inhibition

$$Q_{H2} = \alpha_3 g_S(S_{|_{S=S^*}}) X_{S|_{X_S=X_S^*}} + \alpha_4 g_V(V_{|_{V=V^*}}) X_{V|_{X_V=X_V^*}}$$

avec $\alpha_3 = \frac{1-c_s}{c_s}$ et $\alpha_4 = \frac{1-c_v}{c_v}$.

Équilibre	Q_{H_2}
E_l	0
E_0, E_H, E_A et E_{AH}	$\alpha_3 D X_S^*$
E_V, E_{VH}, E_{VA} et E_*	$\alpha_3 D X_S^* + \alpha_4 D c_v (V^{(0)} - \lambda_V)$

Si $V^{(0)} > \lambda_V$ alors le taux d'hydrogène produit est maximal à l'un des équilibres E_V, E_{VH}, E_{VA} *ou* E_* :

Condition	Équilibre
$\overline{A} < \lambda_A$ et $\overline{H} < \lambda_H$	E_V
$\overline{A} < \lambda_A$ et $\overline{H} > \lambda_H$	E_{VH}
$\overline{A} > \lambda_A$ et $\overline{H} < \lambda_H$	E_{VA}
$\overline{A} > \lambda_A$ et $\overline{H} > \lambda_H$	E_*

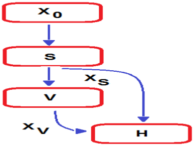


Figure 7 – Le flux d'hydrogène dans le cas $V^{(0)} > \lambda_V$ et $\overline{H} < \lambda_H$

Si $V^{(0)} < \lambda_V$ alors le taux d'hydrogène produit est maximal à l'un des équilibres E_0, E_H, E_A *ou* E_{AH} :

Condition	Équilibre
$A^{(0)} < \lambda_A$, $H^{(0)} < \lambda_H$ et $S_{in}^* > \lambda_S$	E_0
$A^{(0)} < \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$	E_H
$A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} < \lambda_H$	E_A
$A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$	E_{AH}

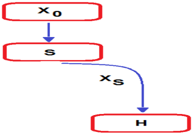


Figure 8 – Le flux d'hydrogène dans le cas $V^{(0)} < \lambda_V$ et $H^{(0)} < \lambda_H$

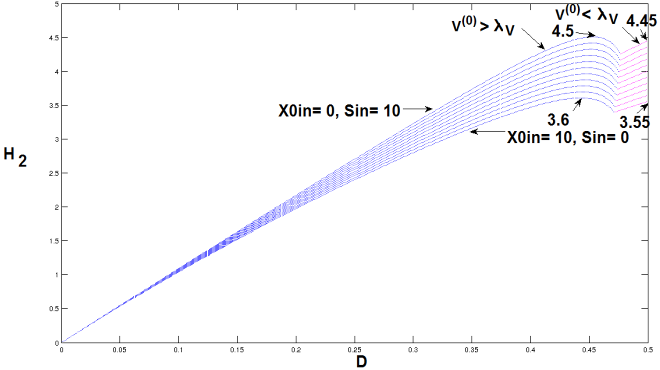


Figure 9 – La variation du taux d'hydrogène pour $S_{in} + X_{0in} = 10$

LE TAUX DE MÉTHANE PRODUIT POUR LE MODÈLE AVEC HYDROLYSE MICROBIENNE DANS LE CAS $g_0(X_{0in}) \leqslant \frac{D}{c_s k_0}$

$$Q_{CH_4} = \alpha_1 g_A(A_{|_{A=A^*}}) X_{A|_{X_A = X_A^*}} + \alpha_2 g_H(H_{|_{H=H^*}}) X_{H|_{X_H = X_H^*}}$$

Dans le cas $V^{(0)} < \lambda_V$:

Condition	Équilibre
$H^{(0)} > \lambda_H$ et $A^{(0)} > \lambda_A$	F^*_{AH} (R_5 ou R_6)
$H^{(0)} > \lambda_H$ et $A^{(0)} < \lambda_A$	F^*_H (R_3)
$H^{(0)} < \lambda_H$ et $A^{(0)} > \lambda_A$	F^*_A (R_{10})

Dans le cas $V^{(0)} > \lambda_V$:

Condition	Équilibre
$\overline{H} > \lambda_H$ et $\overline{A} > \lambda_A$	F^* $(R_6$ ou R_7)
$V^{(0)} > \lambda_V$, $\overline{H} < \lambda_H$ et $\overline{A} > \lambda_A$	F^*_{VA} (R_{11})
$V^{(0)} > \lambda_V$, $\overline{H} > \lambda_H$ et $\overline{A} < \lambda_A$	F^*_{VH} (R_4, R_5, R_8 ou R_9)

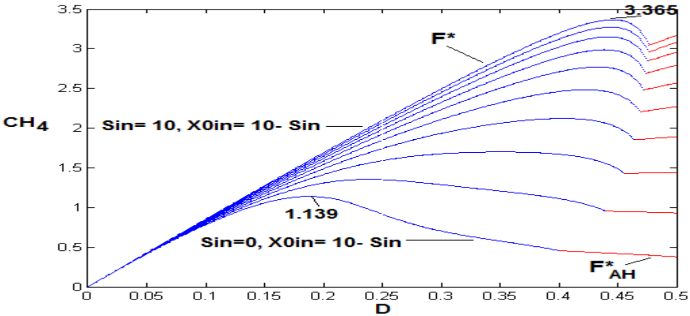


Figure 10 – La variation du taux de méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 10$

$$Q_{H2} = \alpha_3 g_S(S_{|_{S=S^*}}) X_{S|_{X_S=X_S^*}} + \alpha_4 g_V(V_{|_{V=V^*}}) X_{V|_{X_V=X_V^*}}$$

Dans le cas $V^{(0)} < \lambda_V$:

Condition	Équilibre
$S^{in} > \lambda_S$	F_0^* (R_2)
$H^{(0)} > \lambda_H$	F_H^* (R_3)
$A^{(0)} > \lambda_A$	F_A^* (R_{10})
$H^{(0)} > \lambda_H$ et $A^{(0)} > \lambda_A$	F_{AH}^* (R_5 ou R_6)

Dans le cas $V^{(0)} > \lambda_V$:

Condition	Équilibre
$\overline{H} > \lambda_H$ et $\overline{A} > \lambda_A$	F^* (R_6 ou R_7)
$\overline{A} > \lambda_A$	F_{VA}^* (R_{11} où $\overline{H} < \lambda_H$)
$\overline{H} > \lambda_H$	F_{VH}^* (R_4, R_5, R_8 ou R_9 où $\overline{A} < \lambda_A$)
$\overline{H} < \lambda_H$ et $\overline{A} < \lambda_A$	F_V^* (existe dans R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9 ou R_{11})

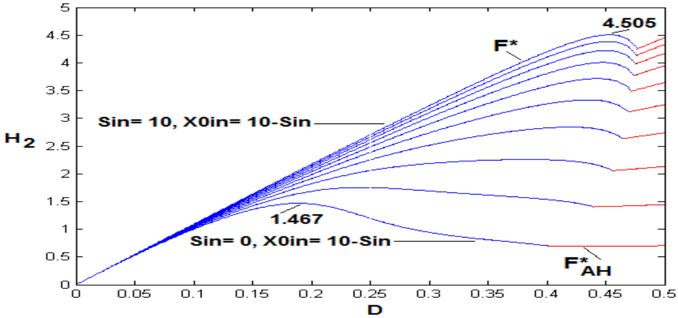


Figure 11 – La variation du taux d'hydrogène pour $S_{in} + X_{0in} = 10$.

$$Q_{CH_4} = \alpha_1 g_A(A|_{A=A^*})X_{A|_{X_A=X_A^*}} + \alpha_2 g_H(H|_{H=H^*}, A|_{A=A^*})X_{H|_{X_H=X_H^*}}$$

1. Si $A^1 > max(\lambda_A^1, A^{(0)})$ et $H^1 > max(\lambda_H^1, H^{(0)})$, le taux maximal du méthane produit est donné par l'équilibre E_{11}.
2. Si $A^{(0)} > max(\lambda_A^1, A^1)$ et $H^{(0)} > max(\lambda_H^1, H^1)$, le taux maximal du méthane produit est donné par l'équilibre E_5 (X_V est lessivée).

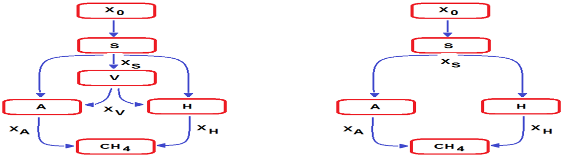


Figure 12 – Le flux de méthane

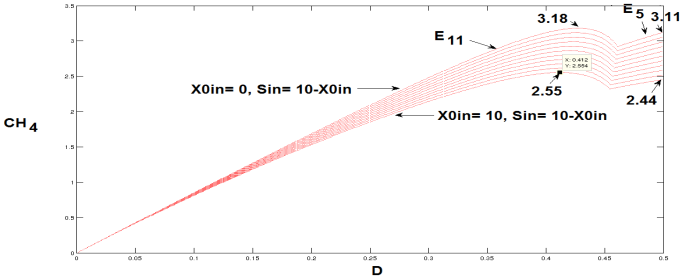


Figure 13 – La variation du taux du méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 10$, $\mu_h = \mu_a = 1$ et $k_I = 100$

$$Q_{H_2} = \alpha_3 g_S(S_{|S=S^*})X_{S|_{X_S=X_S^*}} + \alpha_4 g_V(V_{|V=V^*}, H_{|H=H^*})X_{V|_{X_V=X_V^*}}$$

1. Si $V^{(0)} < \hat{V}$, $V^{(0)} < \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$, le taux maximal de H_2 est donné par l'un des équilibres E_1, E_2, E_3 ou E_5.
2. Si $V^{(0)} > \hat{V}$, $V^{(0)} < \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$, le taux maximal de H_2 est donné par E_7 ou E_9.
3. Si $V^{(0)} < \hat{V}$, $V^{(0)} > \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$, le taux maximal de H_2 est donné par l'équilibre E_8.

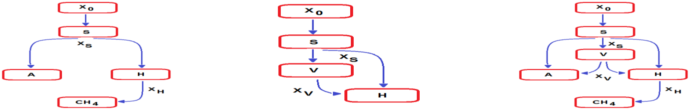


Figure 14 – Le flux d'hydrogène

Conclusion :

- Étude mathématique d'un modèle du chémostat avec dégradation enzymatique du substrat (matière organique) qui peut être sous forme solide.
- L'étude du modèle é trois étapes sans compartiment microbien hydrolytique est déduite du modèle AM2.
- L'étude du modèle à trois étapes avec compartiment microbien hydrolytique est déduite du sous-modèle.
- Le système peut présenter la bistabilité avec un taux de croissance monotone et des concentrations du substrat à l'entrée du chémostat inférieur au seuil de rentabilité.
- Dans le modèle classique du chémostat : le lessivage est l'unique point d'équilibre qui attire toutes les solutions.
- D'où l'importance de l'hydrolyse dans l'apparition des équilibres strictement positifs et la bistabilité.

- Tenir compte des bactéries qui dégradent la matière organique pour produire du substrat simple influe sur la stabilité des équilibres.
- Du modèle avec hydrolyse enzymatique vers le modèle avec compartiment hydrolytique microbien, sans inhibition, l'équilibre de l'extinction des X_V qui était stable devient instable et les équilibres correspondant à l'extinction des X_V et des X_H, ou à l'extinction des X_A, ou à l'extinction des X_H qui étaient instables deviennent stables.
- La modélisation de l'hydrolyse influe sur le comportement du système d'où l'importance de la prise en compte de l'étape d'hydrolyse dans les modèles de la D. A.

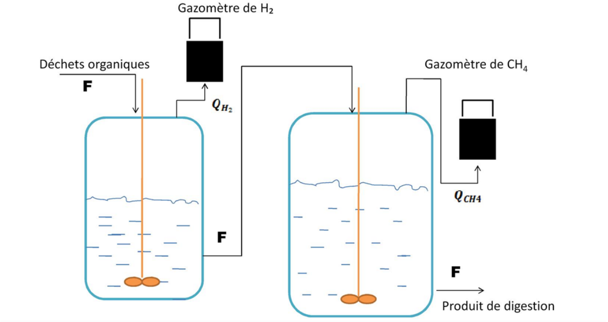
Conclusion :

- L'ajout de l'inhibition influe sur la stabilité des équilibres.
- L'augmentation des concentrations à l'entrée pour un modèle avec hydrolyse enzymatique favorise l'augmentation du biogaz produit.
- Le modèle sans inhibition produit plus de biogaz que le modèle avec inhibition.
- Pour des concentrations à l'entrée fixées, il existe un taux de dilution qui maximise le taux de méthane. Pour ce taux, la concentration des X_A augmente et celle de A deviennent assez faibles, ce qui affaiblit l'inhibition des X_H qui sont les producteurs de CH_4.
- Pour le H_2 produit, il existe un taux de dilution qui maximise le taux de H_2, pour des concentrations des X_H très faibles.
- Du point de vue opératoire, on peut agir sur le taux de dilution pour éviter les régions de bistabilité.

Biogas optimisation

Biogas optimisation

- A model describing a process operating in two bioreactors in series to maximize the rates of hydrogen and methane produced. [6]



6. N. Mejri, N. Abdellatif, Y. Daoud, Mathematical analysis of a two-stage Anaerobic Digestion model with production of hydrogen and methane. CARI'2020, hal-02931947

Hydrogen production model in BR_1

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS_0}{dt} = -D_1 S_0 - \beta X_1 S_0 + D_1 Y_P S_0^{in} \\[2ex]
\dfrac{dS_1}{dt} = -D_1 S_1 + \beta X_1 S_0 - \dfrac{\mu(S_1)}{Y_1} X_1 \\[2ex]
\dfrac{dX_1}{dt} = (\mu(S_1) - D_1) X_1 \\[2ex]
\dfrac{dPr_1}{dt} = \dfrac{\mu(S_1)}{Y_{Pr_1}} X_1 - D_1 Pr_1 \\[2ex]
\dfrac{dBut_1}{dt} = \dfrac{\mu(S_1)}{Y_{But_1}} X_1 - D_1 But_1 \\[2ex]
\dfrac{dAc_1}{dt} = \dfrac{\mu(S_1)}{Y_{Ac_1}} X_1 - D_1 Ac_1.
\end{cases}
$$

- D_1 is the dilution rate.
- S_0^{in} is the effluent substrate concentration in BR_1.
- S_0 is the substrate (cellulose) concentration.
- S_1 is the substrate (cellobiose) concentration, obtained by transformation of S_0 after hydrolysis.
- Pr_1, But_1 and Ac_1 are the produced propionate, butyrate and acetate concentrations.
- X_1 is the acedogenic concentration.
- μ is the specific growth rate of acedogenic bacteria.
- β, Y_1, Y_{Pr_1}, Y_{But_1} and Y_{Ac_1} are yield coefficients.

. E. Chorukova, I. Simeonov, Mathematical modeling of the anaerobic digestion in two stage system with production of hydrogen and methane including three intermediate products , International journal of Hydrogen Energy, doi :10.1016/j.ijhydene.2019.01.228, 2019.

Methane production model in BR_2

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dPr_2}{dt} &= D_2(Pr_1 - Pr_2) - \frac{\mu_{Pr}(Pr_2)}{Y_{Pr_2}} X_{Pr} \\
\frac{dX_{Pr}}{dt} &= (\mu_{Pr}(Pr_2) - D_2) X_{Pr} \\
\frac{dBut_2}{dt} &= D_2(But_1 - But_2) - \frac{\mu_{But}(But_2)}{Y_{But_2}} X_{But} \\
\frac{dX_{But}}{dt} &= (\mu_{But}(But_2) - D_2) X_{But} \\
\frac{dAc_2}{dt} &= D_2(Ac_1 - Ac_2) + \frac{\mu_{Pr}(Pr_2)}{Y_{Pr_2}} X_{Pr} + \frac{\mu_{But}(But_2)}{Y_{But_2}} X_{But} - \frac{\mu_{Ac}(Ac_2)}{Y_{Ac_2}} X_{Ac} \\
\frac{dX_{Ac}}{dt} &= (\mu_{Ac}(Ac_2) - D_2) X_{Ac}.
\end{aligned}
\right.
\tag{2}
$$

The methane production model in BR_2

- D_2 is the dilution rate in BR_2.
- Pr_2 and Pr_1 are the propionate concentrations.
- But_2 and But_1 are the butyrate concentrations.
- Ac_2 and Ac_1 are the acetate concentrations.
- X_{Pr} and X_{But} are the propionate and the butyrate degrading bacteria concentration, resp.
- X_{Ac} is the methanogenic bacteria concentration.
- μ_{Pr} and μ_{But} are the specific growth rates of propionate and butyrate degrading bacteria, resp.
- μ_{Ac} is the specific growth rate of methanogenic bacteria.
- Y_{Pr_2} , Y_{But_2} and Y_{Ac_2} are yield coefficients.

Two-phase AD model

- Qualitative study of the two-phase system behavior.
- Determination of the hydrogen (resp. methane) rates in the first (resp. second) bioreactor, depending on the operating parameters.
- The rate of biogas is maximal in an equilibrium where all biomasses are present.

In conclusion

- These models take into account various situations that can be found in natural environments as well as in bioreactors.
- The mathematical analysis of these models plays an important role in understanding and interpreting the phenomena and interactions observed in the real AD systems and provides qualitative information about the main variables.
- Theory and experimentation must exchange and share their respective knowledge, for a better performance of the AD systems.

References

- Y. Daoud - Thèse de doctorat : Analyse de modèles de la digestion anaérobie : Application à la modélisation et au contrôle des bioréacteurs, ENIT & Université de Montpellier, (2017).

- Y. Daoud, N. Abdellatif, T. Sari, J. Harmand â€" Steady state analysis of a syntrophic model :The effect of a new input substrate concentration, Mathematical modeling of natural phenomena, 13, (3), 31, (2018).

- Y. Daoud, N. Abdellatif, J. Harmand, Modèles mathématiques de digestion anaérobie : effet de l'hydrolyse sur la production du biogaz, ARIMA Journal, Vol 28 (2019).

- N. Mejri - Mastère de recherche : Modélisation mathématique d'un système de digestion anaérobie à deux phases avec production d'hydrogène et de méthane, LAMSIN, ENIT & FST, (2019)

Merci pour votre attention