



# Plan

## ① Introduction

## ② Un modèle bio-économique

Description du modèle

Analyse dynamique

Le problème de contrôle optimal

Recherche d'une solution optimale

simulations numériques

Conclusion

## ③ Un modèle biologique

Comportement asymptotique

A la recherche d'un attracteur

Quantité de biogaz produit

Conclusion et perspectives

### ③ Un modèle biologique

- L'objectif de ce cours est de vous donner une idée de l'intérêt mathématique dans le domaine de la valorisation énergétique des déchets.
- Domaine au cœur de l'actualité en raison des problèmes environnementaux qu'il engendre mais aussi en réponse aux énormes problèmes énergétiques que nous connaissons actuellement aggravés par la guerre en Ukraine.

# Gestion des déchets, pourquoi?

- La croissance démographique, le développement économique et l'urbanisation impliquent une quantité croissante de déchets générés par les activités industrielles et la course à la consommation des ménages.
- La banque mondiale prévoit qu'en 2050, le monde atteindra 3,4 milliards de tonnes de déchets générés annuellement, ce qui représenterait presque 170% de ce qui a été généré en 2016. [10]
- Les pays développés revoient leurs politiques de gestion des déchets et les pays en développement cherchent des solutions.
- Dans les pays en développement, la concentration de matière organique dans les déchets ménagers est très élevée ((60 – 80%) et la digestion anaérobie est le procédé le plus approprié.

# La valorisation énergétique des déchets, pourquoi?

La valorisation énergétique des déchets permettrait

- d'intégrer une économie circulaire
- d'avoir une alternative aux énergies fossiles
- de contribuer à la prévention du risque climatique.
- de contribuer au développement des énergies renouvelables.
- de réduire la facture énergétique (d'environ 4,2 milliards de dollars US).
- de protéger l'environnement.

- ### ③ Un modèle biologique





The diagram illustrates the waste management system. It starts with a waste stock  $X(t)$  represented by a pile of trash. A truck icon represents the input  $\omega(t)$  to the waste stock. From the waste stock, an arrow labeled  $q(t)X(t)$  leads to the Valorization Processing Unit. The Valorization Processing Unit is shown as a large rounded rectangle containing three processing stages, each represented by an icon of a machine. The total capacity or stock of the unit is labeled  $K(t)$ . From the Valorization Processing Unit, a green arrow leads to an energy storage icon (a battery) labeled  $E(t)$ . Additionally, there are two feedback loops: one labeled "Biodegradation" with a downward arrow from the waste stock to  $-\beta X(t)$ , and another labeled "Investment" with an arrow from the Valorization Processing Unit to  $I(t)$ . A third feedback loop labeled "Depreciation" with a downward arrow from the Valorization Processing Unit to  $-\gamma K(t)$ .

## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

Description du modèle

Analyse dynamique

Le problème de contrôle optimal

Recherche d'une solution optimale

simulations numériques

Conclusion

## ③ Un modèle biologique

## Description du modèle

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \omega - (\beta + q)X(t) \\ \dot{E}(t) = qX(t)K(t) - \alpha E(t) \\ \dot{K}(t) = I - \gamma K(t) \end{cases} \quad (1)$$

### Variables et paramètres positifs:

- $X(t)$  : Quantité cumulée de déchets au temps  $t$ .
- $E(t)$  : Quantité cumulée d'énergie produite jusqu'au temps  $t$ .
- $K(t)$  : Capital dédié à l'activité au temps  $t$ .
- $\omega \geq 0$  : Flux de déchets entrant dans la décharge supposé constant .
- $\beta > 0$  : Coefficient de biodégradation.
- $\alpha > 0$  : Taux de dépréciation de l'énergie.
- $0 \leq q \leq 1$  : Ratio de déchets valorisés.
- $I \geq 0$  : Investissement lié à l'activité.
- $\gamma > 0$  : Taux de dépréciation du capital.

## Description:

Le capital ( $K$ ), correspond aux installations et usines disponibles à la décharge. Son évolution suit le modèle néoclassique de Ramsey, c'est-à-dire que le capital évolue avec l'investissement ( $I$ ) et se déprécie à un taux donné  $\gamma$ , [3].

La fonction de production Cobb-Douglas classique  $qX(t)K(t)$  contrôle l'évolution de l'énergie produite ( $E$ ) qui est également soumise à un processus de dépréciation à un taux donné  $\alpha$ .

## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

Description du modèle

Analyse dynamique

Le problème de contrôle optimal

Recherche d'une solution optimale

simulations numériques

Conclusion

## ③ Un modèle biologique

## Analyse dynamique

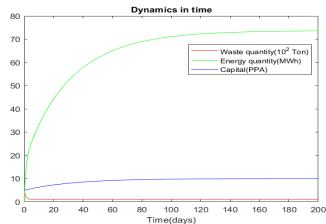
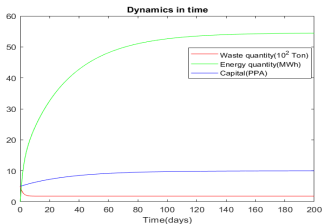
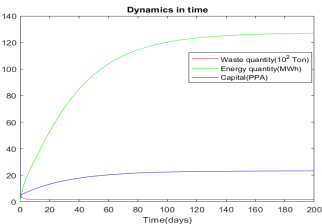
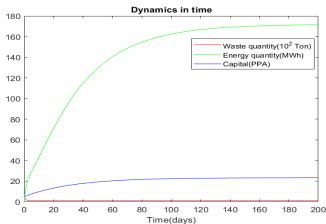
## Proposition 1

A partir de toute condition initiale non négative  $(X_0, E_0, K_0)$ , le système 1 a une solution unique  $(X(t), E(t), K(t))$  qui est non négative, et bornée. De plus, l'équilibre  $(X^*, E^*, K^*)$  donné par,

$$X^* = \frac{\omega}{\beta + q}, \quad ; E^* = q \frac{\omega}{\beta + q} \frac{l}{\alpha \gamma}, \quad \text{et} \quad K^* = \frac{l}{\gamma},$$

est globalement asymptotiquement stable.

## Impact des paramètres $q$ et $i$


$$q = 0.3; i = 0.3.$$

$$q = 0.7; i = 0.3.$$
 $q = 0.3; i = 0.7.$ 
$$\beta = 0.25, \omega = 1, \alpha = 0.1, \gamma = 0.03.$$
$$q = 0.7; i = 0.7.$$





## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

Description du modèle

Analyse dynamique

Le problème de contrôle optimal

Recherche d'une solution optimale

simulations numériques

Conclusion

## ③ Un modèle biologique

# Revenu total net

- $T > 0$  horizon fini correspondant à la période d'activité.
- $E(t)$  supposé être vendu à un prix unitaire constant donné  $p$ .
- coût unitaire de production constant  $c$  et coût d'investissement quadratique.
- $\delta$  taux d'actualisation.

Le revenu total net généré le long de l'activité s'écrit comme suit :

$$J(u) := \int_0^T e^{-\delta t} L(\xi(t), u(t)) dt, \quad (2)$$

où

$$L(\xi, u) = pE - cqx - I(c_1 + c_2 I)$$

$$\xi(t) = (x(t), E(t), K(t)), \quad u(t) = (q(t), I(t)), \quad \forall t \in [0, T]$$

# Le problème de contrôle optimal

En donnant un certain niveau maximal d'investissement  $I_{max}$ , l'investisseur doit choisir la variable de contrôle  $u = (q, I)$  mesurable sur  $[0, T]$  avec des valeurs dans  $U = [0, 1] \times [0, I_{max}]$  et sa variable d'état correspondante, une fonction absolument continue  $\xi = (x, E, K) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^3$  solution de l'équation d'état (3), avec  $\xi(0) = \xi_0$ .

$$\begin{cases} x'(t) = \omega - (\beta + q(t))x(t) \\ E'(t) = q(t)x(t)K(t) - \alpha E(t) \\ K'(t) = I(t) - \gamma K(t) \end{cases} \quad (3)$$

L'investisseur optera naturellement pour la stratégie qui lui permettra de maximiser son rendement :

$$\text{Max}\{J(u); u(t) \in U, \text{ pour p.p. } t \in [0, T], \xi(\cdot) \text{ solution de (3), } \xi(0) = \xi_0\}$$

## Proposition 2

Pour chaque contrôle  $u \in L^\infty([0, T], U)$  et toute condition initiale non négative  $\xi_0$ , il existe une solution unique  $\xi = (x, E, K)$  de (3) définie sur  $[0, T]$ . De plus, ces trajectoires sont non négatives, et uniformément bornées :

$$0 \leq x(t) \leq x_{\max}, 0 \leq E(t) \leq E_{\max}, 0 \leq K(t) \leq K_{\max}, ; \forall t \in [0, T].$$

L'existence et l'unicité de la variable d'état  $\xi = (x, E, K)$  correspondant à un contrôle donné  $u \in L^\infty([0, T], U)$  du système (3) sont fournies par la propriété de Carathéodory des E.D.O.

$$\xi' = g(t, \xi) = (\omega - (\beta + q(t))x, q(t)xK - \alpha E, I(t) - K)$$

avec  $g$  mesurable par rapport à  $t$  et Lipschitz par rapport à  $\xi$ .

### Proposition 3

Il existe au moins un contrôle optimal  $u^* \in L^\infty([0, T], U)$  tel que

$$\max_{u \in U} J(u) = J(u^*).$$

Le champ de vecteurs

$$f(\xi, u) = (\omega - (\beta + q)x, qxK - \alpha E, I - K)$$

est linéaire par rapport à  $u$  et  $C^\infty$  par rapport à  $\xi$ . L'ensemble  $U$  est convexe et compact dans  $\mathbb{R}^2$  et que lagrangien  $L$  est linéaire par rapport à  $q$  et quadratique par rapport à  $I$ . Alors le théorème d'existence classique de Tonnelli s'applique (Clarke [13]).

## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

Description du modèle

Analyse dynamique

Le problème de contrôle optimal

Recherche d'une solution optimale

simulations numériques

Conclusion

## ③ Un modèle biologique

# Principe du maximum de Pontryagin

On considère la valeur courante de l'Hamiltonien correspondant

$$H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi, \lambda, u) \mapsto H(\xi, \lambda, u) = L(\xi, u) + \langle \lambda, f(\xi, u) \rangle .$$

Selon une version adéquate de PMP ([18], [16]), si  $u$  est un contrôle optimal et  $\xi$  la trajectoire associée, il existe une fonction absolument continue  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  (co-état ou état adjoint), telle que

$$\xi'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\xi(t), \lambda(t), u(t)), \quad (4)$$

$$\lambda'(t) = \delta \lambda(t) - \frac{\partial H}{\partial \xi}(\xi(t), \lambda(t), u(t)), \quad (5)$$

$$\max_{v \in U} H(\xi(t), \lambda(t), v) = H(\xi(t), \lambda(t), u(t)), \quad (6)$$

$$\lambda(T) = 0, \quad (7)$$

$$H(\xi, \lambda, u) = pE - cqx - I(c_1 + c_2I) + \lambda_1(\omega - (\beta + q)x) + \lambda_2(qxK - \alpha E) + \lambda_3(I - \gamma K).$$

Le co-état  $\lambda$  est la solution des équations adjointes suivantes :

$$\begin{cases} \lambda'_1 &= \lambda_1(\delta + \beta + q) - \lambda_2 qK + cq, \\ \lambda'_2 &= \lambda_2(\delta + \alpha) - p, \\ \lambda'_3 &= \lambda_3(\delta + \gamma) - \lambda_2 qx, \\ \lambda_i(T) &= 0; \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (8)$$

On obtient directement l'expression explicite de  $\lambda_2$  :

$$\lambda_2(t) = \frac{p}{\delta + \alpha} (1 - \exp((\alpha + \delta)(t - T))).$$

De plus, la condition de maximum (6) conduit à une optimisation séparée pour chaque commande, la première linéaire et la seconde quadratique, toutes deux sur des ensembles bornés. Ainsi, les expressions de la commande optimale sont simples.



# La commande optimale

Le deuxième contrôle  $I$  est donné par:

$$I(t) = \begin{cases} I_{max}, & \text{if } \frac{\lambda_3(t) - c_1}{2c_2} > I_{max}; \\ 0 & \text{if } \lambda_3(t) - c_1 < 0 \\ \frac{\lambda_3(t) - c_1}{2c_2}, & \text{else.} \end{cases} \quad (9)$$

On considère la fonction switch  $\phi(t) := \frac{\partial H}{\partial q} = \varphi(t)x(t)$  où

$$\varphi(t) = -c - \lambda_1(t) + \lambda_2(t)K(t). \quad (10)$$

Puisque  $x(t) > 0, \forall t > 0$ , nous pouvons l'assimiler à  $\varphi$ . Ainsi le contrôle optimal  $q$  va s'écrire

$$q(t) = \begin{cases} 1, & \text{whenever } \varphi(t) > 0; \\ 0, & \text{whenever } \varphi(t) < 0. \end{cases} \quad (11)$$

# $q$ est un pur bang-bang

Pour montrer que l'existence de contrôle singulier est exclue, supposons que la fonction switch  $\phi(t)$  s'annule sur un certain intervalle  $[t_1, t_2]$  inclus dans  $[0, T]$ , alors il en sera de même pour sa dérivée:

$$\varphi'(t) = -c(\delta + \beta) + \lambda_2 K(\alpha - \beta - \gamma) - pK + \lambda_2 I \equiv 0$$

Si on dérive une deuxième fois, le seul terme contenant  $q$  est  $\lambda_2 I'$  et  $I' = \frac{\lambda_3'}{2c_2}$  donc  $-\frac{\partial}{\partial q} \varphi'' = \frac{x\lambda_2^2}{2c_2} > 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Or la condition nécessaire d'optimalité de Legendre-Clebsh ([5]) devrait être satisfaite c.à.d

$$-(1)^n \frac{\partial}{\partial q} \left( \varphi(t)^{(2n)} \right) \leq 0, \quad (12)$$

où  $n$  le plus petit nombre tel que  $\varphi(t)^{(2n)}$  contenant explicitement la variable de contrôle  $q$ . La condition (12) n'est donc pas satisfaite pour  $n = 1$  ce qui exclue l'existence d'un contrôle singulier.

# Temps de switch

Selon les conditions de transversalité  $\varphi(T) = -c < 0$ . Par argument de continuité, la fonction  $\varphi$  doit être négative sur un voisinage de  $T$ , soit  $]\tau, T]$ . Cela conduit à  $q = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$ ,  $l = 0$ , et donc  $\lambda_1 = 0$  sur  $]\tau, T]$ . On prend le plus petit  $\tau$  vérifiant ces conditions. La possibilité de  $\tau = 0$  est un cas dégénéré et correspond à un coût d'opportunité trop élevé. Donc, sans perte de généralité on peut supposer que  $\tau > 0$ , et alors  $\varphi(\tau) = 0$ . De plus, sur cet intervalle final  $[\tau, T]$ , on montre facilement que  $\varphi'(t) < 0$ .

Par le même argument de continuité, nous pouvons garantir l'existence du plus petit temps  $\sigma$ , tel que  $\varphi$  est positif sur l'intervalle  $]\sigma, \tau[$ .

Pour des valeurs raisonnables des conditions initiales, on peut s'attendre à ce que  $\sigma > 0$ , et à ce que  $\varphi$  change de signe à  $\sigma$ .

## Dépendance de $\sigma$ et de $\tau$ par rapport à $c$ et $T$

Nous avons d'une part  $\lambda_2(\tau)K(\tau) = c$ , et définissons  $h$  par  $h(T, c, \tau) = \frac{p}{\delta + \alpha} (1 - \exp((\alpha + \delta)(\tau - T))) K(\tau) - c$ , alors

$h(T, c, \tau) = 0$ . Notons que  $\frac{\partial h}{\partial \tau} < 0$ . Le théorème de la fonction implicite s'applique pour affirmer l'existence d'un voisinage de  $(T, c)$ , et d'une fonction implicite  $\tau(\cdot)$  sur ce voisinage telle que  $h(T', c', \tau(T', c')) = 0$ . De plus,

$$\frac{\partial \tau}{\partial c} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial c}}{\frac{\partial h}{\partial \tau}} = \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial \tau}} < 0.$$

Par le même argument on montre que  $\frac{\partial \tau}{\partial T} > 0$ . Ce résultat peut être interprété comme suit : plus l'horizon final  $T$  est grand, plus  $\tau$  est proche de  $T$ . Ce fait sera également observé dans les simulations numériques. D'autre part, au premier temps de swich  $\sigma$  on a  $\varphi < 0$  sur  $]0, \sigma[$  et  $\varphi > 0$  sur  $]\sigma, \tau[$ . De plus  $\sigma$  sera décroissant par rapport à  $T$  et croissant par rapport à  $c$ .

# Tendances de la commande optimale

Pour obtenir une meilleure description de la solution optimale, et pour permettre à l'investisseur de prendre des décisions avec plus de précision, nous avons pu à travers une analyse de la fonction pseudo-switch  $\varphi$

- mettre en évidence un contrôle bang-bang
- garantir l'existence de deux temps de switch  $\sigma$  et  $\tau$ .
- réaliser une analyse de sensibilité qui confirme la robustesse du modèle par rapport aux deux paramètres  $T$  et  $c$ .
- mettre en évidence pour tout horizon fixe  $T$  une valeur critique  $c^*$  qui correspond à une multiplicité de solution optimale.

Les simulations numériques qui vont suivre vont confirmer ces tendances.

## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

Description du modèle

Analyse dynamique

Le problème de contrôle optimal

Recherche d'une solution optimale

**simulations numériques**

Conclusion

## ③ Un modèle biologique

# Simulations numériques

Les simulations ont été réalisés avec Matlab avec les conditions initiales  $x_0 = 5$ ,  $E_0 = 0$ ,  $K_0 = 5$  en utilisant les paramètres donnés dans le tableau1.

Table 1: Valeurs numériques des paramètres

Pramètres	Valeur	Unité	Référence
$\alpha$	0.10	$year^{-1}$	Estimé
$\beta$	0.25	$year^{-1}$	Estimé
$c_1$	14	-	[6]
$c_2$	11	-	[6]
$\delta$	0.04	$year^{-1}$	[6]
$\gamma$	0.03	$year^{-1}$	[6]
$\omega$	1	$10^2$ Ton	Estimé
$p$	1	DH $KWh^{-1}$	Estimé

# L'impact de $c$ :

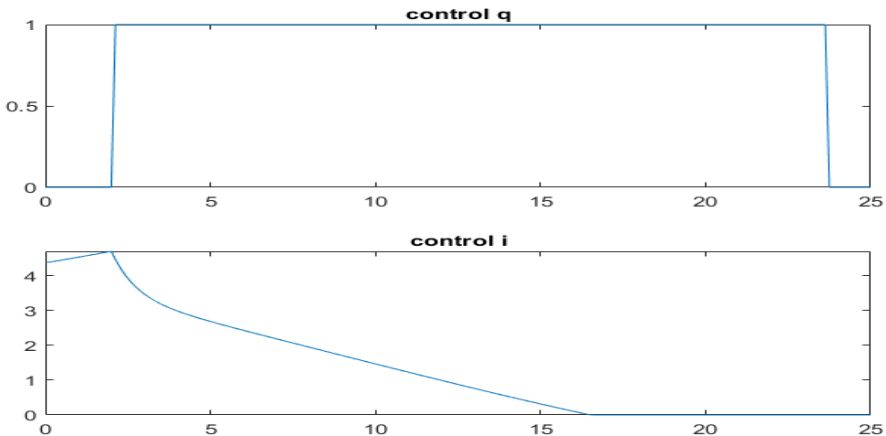


Figure 1: Control policy, when  $T = 25$ ,  $c = 0.9$ .



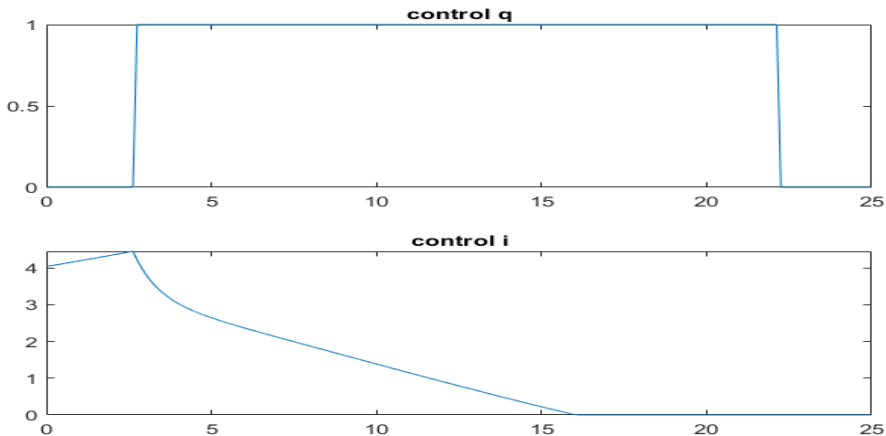


Figure 2: control policy, when  $T = 25$ ,  $c = 1.7$ .

# L'impact de $T$ :

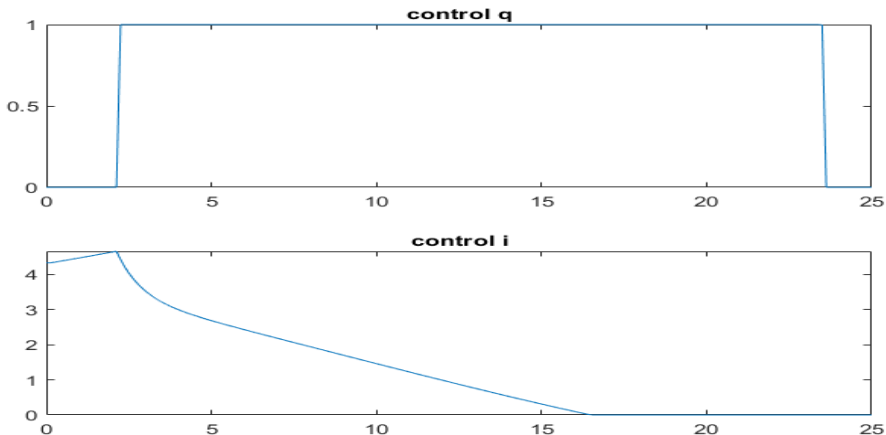


Figure 3: Control policy, when  $T = 25, c = 1$ .

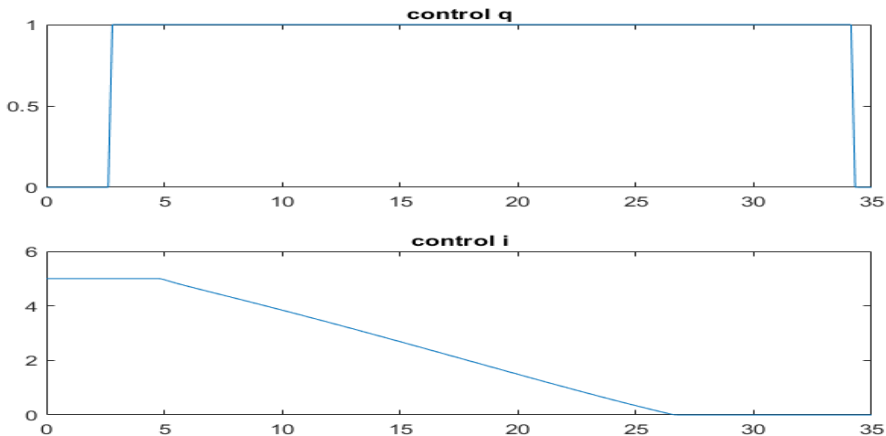


Figure 4: control policy, when  $T = 35$ ,  $c = 1$ .

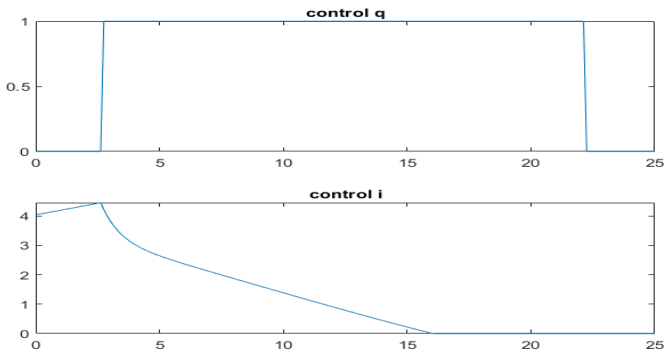
# Interprétation

- Il est clair que le premier switch augmente avec  $c$ , mais que le second diminue. Par conséquent, la période de traitement décroît avec  $c$ . Alors que l'investissement optimal augmente en fonction de  $c$ , afin d'accroître le capital et d'intensifier la production d'énergie en un temps plus court.
- Le premier switch diminue avec  $T$ , tandis que la seconde augmente avec  $T$ . Par conséquent, la période de traitement s'allonge lorsque  $T$  augmente.



Zone  $J^* > 0$

La décision optimale est répartie sur trois étapes. La première consiste à ne pas récupérer les déchets tout en réalisant un investissement maximal. La deuxième étape consiste à récupérer au ratio maximal et à un investissement décroissant. La dernière étape est sans aucune récupération ni investissement.



# Zone courbe rouge

L'investisseur est devant deux décisions: investir dans l'activité avec un profit nul ou ne pas investir dans l'activité.

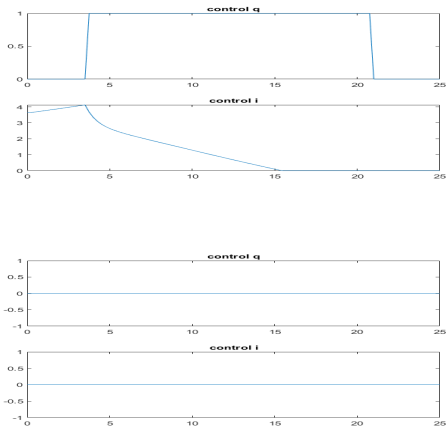


Figure 7: Bang-Bang control, when  $T = 25, c = 2.42$





## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

Description du modèle

Analyse dynamique

Le problème de contrôle optimal

Recherche d'une solution optimale

simulations numériques

Conclusion

## ③ Un modèle biologique

# Pour conclure

Plusieurs auteurs ont utilisé la théorie du contrôle optimal pour une meilleure compréhension des processus biotechnologiques qui permettent de maximiser la production de biogaz. Cependant, l'aspect bioéconomique n'a pas bénéficié d'une littérature importante. Notre modèle a été inspiré d'un exercice de modélisation de Colin Clark et John Conrad ([3]) sur la gestion de l'environnement. La dynamique décrite se base sur des modèles économiques classiques très simples, et peut être sujet à plusieurs possibilité de généralisation et de développement. On pourrait par exemple revoir la fonction de production, penser une dynamique où la quantité traitée dépend aussi du capital ....

## ① Introduction

## ② Un modèle bio-économique

## ③ Un modèle biologique

Comportement asymptotique

A la recherche d'un attracteur

Quantité de biogaz produit

Conclusion et perspectives









## Les paramètres

$Y_a$  : taux de conversion du carbone dissous en biomasse acidogène.

$y_m$  : taux de conversion du carbone acétate en biomasse méthanogène,

$y_{ac}$  : taux de conversion du carbone acétate,

$y_{CH_4}$  : rendement de la conversion en méthane.

$K_d$  : constante de demi-saturation du substrat carboné dissous ( $\text{g}/\text{m}^3$ ).

$K_a$  : constante de demi-saturation du substrat carboné acétate ( $\text{g}/\text{m}^3$ ).

$K_{id}$  : Constante d'inhibition du substrat carboné dissous ( $\text{g}/\text{m}^3$ ).

$K_{ia}$  : constante d'inhibition du substrat carboné acétate ( $\text{g}/\text{m}^3$ ).

$k_h$  : constante d'hydrolyse du composant solide ( $jour^{-1}$ ),

$d_a$  : taux de mortalité de la biomasse acidogène ( $jour^{-1}$ ),

$d_m$  : taux de mortalité de la biomasse méthanogène ( $jour^{-1}$ ),

$\mu_a^{max}$  : taux de croissance maximal de la biomasse acidogène ( $jour^{-1}$ ),

$\mu_m^{max}$  : taux de croissance maximal de la biomasse méthanogène ( $jour^{-1}$ ).







Dans la suite on notera par:

$$\xi_{dc} = \{s \in \mathbb{R}_+; \mu_a(s) \leq d_a\} \quad \text{et} \quad \xi_{ac} = \{s \in \mathbb{R}_+; \mu_m(s) \leq d_m\}.$$

Par un calcul simple, on a

$$\xi_{dc} = [0, \lambda_a^-] \cup [\lambda_a^+, +\infty[ \quad \text{avec} \quad \lambda_a^\pm = \frac{\mu_a^{\max} - d_a \pm \sqrt{\Delta_a}}{2d_a/K_{id}}, \quad (13)$$

and

$$\xi_{ac} = [0, \lambda_m^-] \cup [\lambda_m^+, +\infty[ \quad \text{avec} \quad \lambda_m^\pm = \frac{\mu_m^{\max} - d_m \pm \sqrt{\Delta_m}}{2d_m/K_{ia}}, \quad (14)$$

où

$$\Delta_a = (\mu_a^{max} - d_a)^2 - 4 \frac{K_d}{K_{id}} d_a^2 \quad \text{and} \quad \Delta_m = (\mu_m^{max} - d_m)^2 - 4 \frac{K_a}{K_{ia}} d_m^2.$$

## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

## ③ Un modèle biologique

Comportement asymptotique

A la recherche d'un attracteur

Quantité de biogaz produit

Conclusion et perspectives

## Positivité, Bornitude et Convergence des trajectoires

L'existence et l'unicité d'une solution issue d'une valeur initiale donnée est garantie par le théorème de Cauchy-Lipshitz..

## Proposition 4

Sous les hypothèses ( $H1 - H4$ ), pour toute valeur initiale positive  $(S_s^0, S_{dc}^0, X_a^0, S_{ac}^0, X_m^0, CH_4^0, CO_2^0)$ , la solution  $(S_s, S_{dc}, X_a, S_{ac}, X_m, CH_4, CO_2)$  du système  $(S_1) - (S_2)$  est non-négative et bornée.

Bornitude: il suffit de remarquer que notre système est fermé:

$$S'_s + S'_{dc} + X'_a + S'_{ac} + X'_m + CH'_4 + CO'_2 = 0.$$

Positivité: utiliser la linéarité par rapport à certaines variables et/ou le théorème de comparaison des E.D.

### Proposition 5

Sous les hypothèses  $(H1 - H4)$ , pour toute condition initiale non-négative  $(S_s^0, S_{dc}^0, X_a^0, S_{ac}^0, X_m^0)$ , on a:

$$1) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S_s(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} X_a(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} X_m(t) = 0.$$

2) Il existe deux réels positifs  $S_{dc}^*$  et  $S_{ac}^*$ , qui vérifient:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_{dc}(t) = S_{dc}^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S_{ac}(t) = S_{ac}^*.$$

On a:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S_s(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} S_s^0 e^{-k_h t} = 0$ . Par ailleurs, la fonction définie

par  $V_1(t) = S_s(t) + \frac{1}{y_a} X_a(t) + S_{dc}(t)$  est décroissante et minorée par 0 donc convergente  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V_1(t) = l_1 < \infty$ . De plus  $V_1''$  est bornée d'où

par le lemme de Barbalat ([9]),  $V_1'$  est uniformément continue et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_1'(t) = 0. \text{ D'où } \lim_{t \rightarrow +\infty} X_a(t) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} S_{dc}(t) = S_{dc}^* = l_1.$$

On montre de même en utilisant la fonction:

$$V_2(t) = S_{ac}(t) + \frac{1}{y_m} X_m(t) + y_{ac} (S_s(t) + X_a(t) + S_{dc}(t)) \text{ que}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_m(t) = 0, \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} S_{ac}(t) = S_{ac}^*,$$



## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

## ③ Un modèle biologique

Comportement asymptotique

A la recherche d'un attracteur

Quantité de biogaz produit

Conclusion et perspectives



## A la recherche d'un attracteur

## Proposition 6

Sous les hypothèses ( $H1 - H4$ ), pour toute condition initiale non-négative  $(S_s^0, S_{dc}^0, X_a^0, S_{ac}^0, X_m^0)$ , la solution de  $(\mathcal{S}_1)$  converge asymptotiquement vers un équilibre  $(0, S_{dc}^*, 0, S_{ac}^*, 0)$  où  $S_{dc}^*$  et  $S_{ac}^*$  appartiennent respectivement aux ensembles  $\xi_{dc}$  and  $\xi_{ac}$ , définis par  $\xi_{dc} = \{s \in \mathbb{R}_+; \mu_a(s) \leq d_a\}$  et  $\xi_{ac} = \{s \in \mathbb{R}_+; \mu_m(s) \leq d_m\}$

Supposons que  $S_{dc}^*$  n'appartient pas à  $\xi_{dc}$ . Par continuité on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists T \geq 0, \forall t > T: \quad -\epsilon < \mu_a(S_{dc}(t)) - \mu_a(S_{dc}^*) < \epsilon.$$

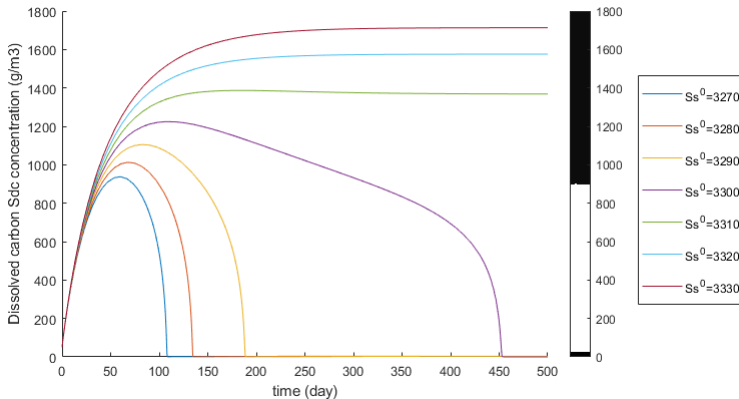
On choisit  $\epsilon = \frac{\mu_a(S_{dc}^*) - d_a}{2} > 0$ ,

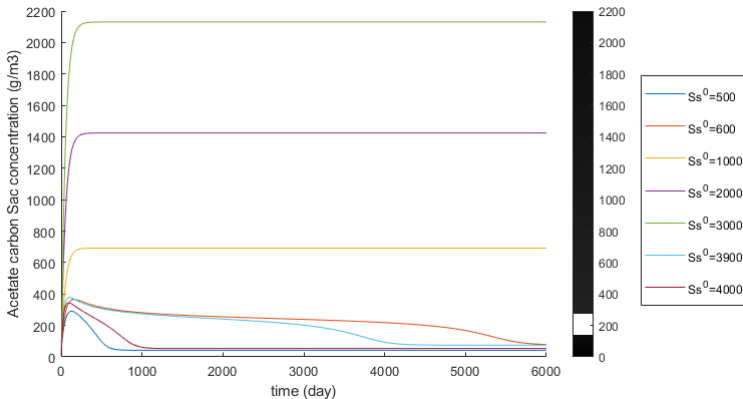
$$\mu_a(S_{aq}(t)) - d_a = \mu_a(\bar{S}_{aq}(t)) + 2\epsilon - \mu_a(S_{aq}^*) > \epsilon$$

d'où  $\frac{dX_a}{dt}(t) > \epsilon X_a(t)$ ,  $\forall t > T$ . Si on intègre de  $s$  à  $t$ , avec  $T < s < t$ , nous obtenons  $X_a(t) > X_a(s)e^{\epsilon(t-s)}$ ,  $\forall t > T$ . Ce qui contredit le fait que  $X_a$  est borné.

On montre de la même manière que  $S_{ac}^*$  appartient à  $\xi_{ac}$ .

## Trajectoires $S_{dc}$ pour différentes valeurs initiales $S_s^0$





# Recherche d'un attracteur

## Proposition 7

Sous les hypothèses ( $H1 - H4$ ), pour chaque vecteur d'équilibre  $E = (0, S_{dc}^*, 0, S_{ac}^*, 0)$  avec  $S_{dc}^* \in \xi_{dc}$  et  $S_{ac}^* \in \xi_{ac}$ , il existe une variété invariante  $M$  de dimension trois dans  $\mathbb{R}_+^5$  telle que toute solution de  $(S_1)$  avec une condition initiale dans  $M$  converge asymptotiquement vers  $E$ .

Pour montrer l'existence de la variété invariante de dimension trois, nous procédons à un changement de variable adéquat qui nous permet de construire un système équivalent à  $(S_1)$  sur un domaine invariant  $D$  donné, et qui est hyperbolique avec zéro comme unique valeur propre. On applique alors à ce système la théorème de variété stable pour déterminer l'existence de  $M$ .

## Corollaire

Sous les hypothèses ( $H1 - H4$ ), l'ensemble

$$\{0\} \times \xi_{dc} \times \{0\} \times \xi_{ac} \times \{0\}$$

est un attracteur du système  $(S_1)$ .



## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

## ③ Un modèle biologique

Comportement asymptotique

A la recherche d'un attracteur

Quantité de biogaz produit

Conclusion et perspectives

# Quantité de biogaz produit

## Proposition 7

Sous les hypothèses ( $H1 - H4$ ), pour toute condition initiale non- négative  $(S_s^0, S_{dc}^0, X_a^0, S_{ac}^0, X_m^0, CH_4^0, CO_2^0)$ , la solution de  $(S_2)$  verifie:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} CH_4(t) = CH_4^0 + y_{CH4}(\alpha - S_{ac}^* - y_{ac}S_{dc}^*)$$

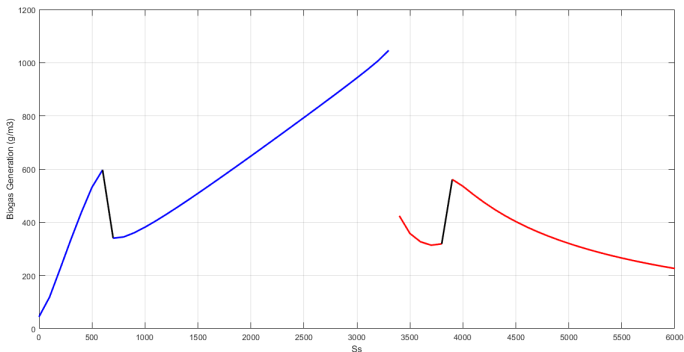
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} CO_2(t) = CO_2^0 + \beta - \alpha y_{CH4} + (y_{ac} \cdot y_{CH4} - 1)S_{dc}^* + (y_{CH4} - 1)S_{ac}^*$$

avec

$$\alpha = y_{ac}(S_s^0 + S_{dc}^0 + X_a^0) + S_{ac}^0 + X_m^0, \quad \beta = S_s^0 + S_{dc}^0 + X_a^0 + S_{ac}^0 + X_m^0.$$

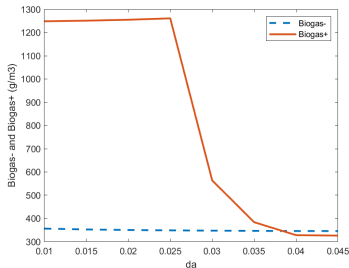


## Production de biogaz

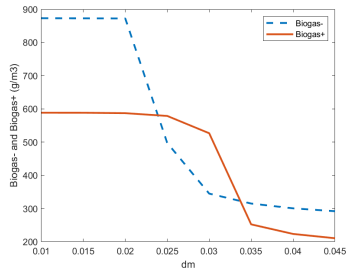


En fonction de la valeur initiale  $S_s^0$ .

## Production de biogaz en fonction des taux de mortalité



En fonction de  $d_a$ , bleu  $S_s^0 < 3300$ .



En fonction de  $d_m$ , bleu  $S_s^0 < 3300$ .

## ① Introduction

## ② Un modèle bio-economique

## ③ Un modèle biologique

Comportement asymptotique

A la recherche d'un attracteur

Quantité de biogaz produit

Conclusion et perspectives

# Conclusion et perspectives

- Les tests numériques confirment les résultats de l'analyse.
  - La production de biogaz est impacté par le taux de mortalité.
  - La production de biogaz présente un point de discontinuité à partir duquel elle décroît fortement en fonction du stock initial.
- 
- \* Contrôler le stock initial de manière à ne pas dépasser la valeur de discontinuité.
  - \* Prendre en compte la spatialisation des variables du modèle, et passer à un problème aux équations aux dérivées partielles.



## Bibliography II

- [5] G. Dieter, C. Jonathan, F. Gustav, T. Gernot, B. Doris, (2008). Optimal Control of Nonlinear Processes: With Applications in Drugs, Corruption, and Terror. 10.1007/978-3-540-77647-5.
- [6] M. Elke, G. Dieter, T. Gernot. (2016). A non-autonomous optimal control model of renewable energy production under the aspect of fluctuating supply and learning by doing. OR Spectrum. 38. 10.1007/s00291-016-0444-0.
- [7] M. El-Fadel, A. Findikakis, J. Leckie: A numerical model for methane production in managed sanitary landfills. Waste Management & Research 7(1), 31-42 (1989)
- [8] D. Grass, JP.Caulkins, G. Feichtinger, G.Tragler, DA.Behrens, Optimal Control of Nonlinear Processes: With Applications in Drugs, Corruption, and Terror. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 2008.









## Bibliography VI

- [20] IEA (2020), Outlook for biogas and biomethane: Prospects for organic growth, IEA, Paris <https://www.iea.org/reports/outlook-for-biogas-and-biomethane-prospects-for-organic-growth>.
- [21] Federal Ministry for the Environment, Nature Conservation and Nuclear Safety (BMU), (2018). Waste Management in Germany 2018 Facts, data, diagrams.
- [22] A National Strategy for the Reduction and Recovery of Waste (SNRVD) by 2030

*Thanks!*